
Algèbre - Chapitre 2

Ensembles et applications

I Ensembles

1) Ensembles et sous ensembles

a) Définition et notations



Définition :

On appelle **ensemble** tout objet mathématique contenant des éléments. On note $x \in E$ pour dire que l'élément x **appartient** à E .

Exemple :

Pour décrire un ensemble, on utilisera plusieurs types de notation :

- ▶ $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$: les accolades “{ }” se lisent “ensemble constitué de...” ou “ensemble des...”.

Ce même ensemble peut se noter :

$$E = \{n \in \mathbb{N}; 2 \leq n \leq 6\}$$

Ce qui signifie “ E est l'ensemble des entiers n tels que $2 \leq n \leq 6$ ”.

- ▶ $I = [0, 1]$: les intervalles sont bien sûr des ensembles. Les [] signifient “tous les réels entre....”.

On pourrait également écrire $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x \leq 1\}$.

- ▶ $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ peut aussi se noter $E = \llbracket 2, 6 \rrbracket$. Les $\llbracket \]$ désignent “les intervalles d'entiers”.

- ▶ \emptyset désigne le seul ensemble qui n'a pas d'élément : on l'appelle **ensemble vide**.

b) Sous ensemble



Définition :

On dit qu'un ensemble A est un **sous ensemble de E** (ou **partie de E**) si et seulement si tout élément de A est un élément de E .

On note alors $A \subset E$ et on lit “ A inclus dans E ”.

Exemples :

- ▶ \mathbb{N} est un sous ensemble de \mathbb{Z} .
- ▶ On a une sorte de chaîne d'inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

- ▶ \emptyset est le seul ensemble inclus dans tous les ensembles !



Méthode :

MONTRER UNE INCLUSION

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B , on utilise le fait que dire $A \subset B$ signifie exactement "si on est dans A , alors on est dans B ".

On procédera donc de la façon suivante :

1. On prend un élément quelconque $x \in A$ (en annonçant "soit $x \in A$ "),
2. On montre que $x \in B$.
3. On conclut "donc $A \subset B$."

Exemple :

Soit A l'ensemble des multiples de 4 et B l'ensemble des multiples de 2. Montrons que $A \subset B$.



Theorème 1 : théorème de la double inclusion

Soient E et F deux ensembles. Alors $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Cela fournit une méthode de démonstration : pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, on pourra montrer d'abord $E \subset F$, puis $F \subset E$.

c) Ensemble des parties d'un ensemble :



Définition :

Soit E un ensemble.

On appelle **ensemble des parties de E** , que l'on note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous ensembles de E .

Autrement dit, $A \in \mathcal{P}(E)$ si et seulement si $A \subset E$.

Exemple :

► Soit $E = \{1, 2, 3\}$ l'ensemble des parties de E est

► Comme $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, c'est à dire que \mathbb{N} est un sous ensemble de \mathbb{Z} , on peut écrire $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.

► Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$.



Au secours !

C'EST SUPER GRAND $\mathcal{P}(E)$ NON ?

Si un ensemble E a n éléments, on peut montrer que $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n ...

Très rapidement, on abandonnera donc l'idée de faire la liste des parties d'un ensemble....

2) Intersection, réunion

a) Intersection :

Définition :

Soient A et B deux parties de E . On définit l'**intersection** de A et de B , notée $A \underbrace{\cap}_{\text{"inter"}} B$

par :

$$A \cap B =$$

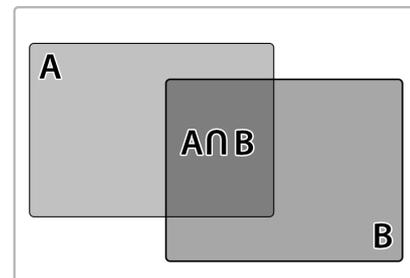
Ce sont les éléments qui sont à la fois dans A et B .

On généralise à n ensembles de la façon suivante :

si A_1, A_2, \dots, A_n sont n ensembles, on définit $\bigcap_{i=1}^n A_i$ par

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont *simultanément* dans tous les A_i .



Exemples :

► $[0; 3] \cap [2; 4] =$

► $]0; 4[\cap]-2; -1[=$: on dit que $]0; 4[$ et $] -2; -1[$ sont

Propriété 1 :

(i) L'intersection est commutative et associative :

$$A \cap B = B \cap A \quad \text{et} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

(ii) L'intersection de deux ensembles est "plus petite" que les ensembles de départ :

$$A \cap B \subset A \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B$$

b) Union

Définition :

Soient A et B deux parties de E . On définit l'**union** de A et de B , notée $A \underbrace{\cup}_{\text{"union"}} B$ par :

$$A \cup B =$$

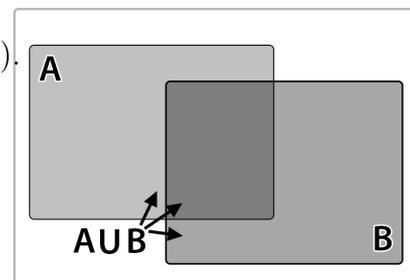
Ce sont les éléments qui sont dans A ou dans B (ou dans les deux).

On généralise à n ensembles de la façon suivante :

si A_1, A_2, \dots, A_n sont n ensembles, on note

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui dans au moins un des A_i .



Exemple :

La fonction f définie par $f(x) = (x - 2)(x - 3)$ est positive sur



Propriété 2 :

Soit A, B, C trois ensembles

- (i) $A \cup B = B \cup A$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- (ii) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ (la réunion est "plus grande")
- (iii) Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$

▷ Preuve :

◁

c) Distributivité



Propriété 3 :

Soient A, B et C trois ensembles. Alors

- ▶ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ▶ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

▷ Preuve : Montrons la deuxième formule.

On fait un tableau avec tous les cas possibles :

$x \in A$	$x \in B$	$x \in C$	$x \in (B \cup C)$	$x \in A \cap (B \cup C)$	$(A \cap B)$	$(A \cap C)$	$(A \cap B) \cup (A \cap C)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

en comparant les colonnes concernées, on a bien $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On fait de même pour la première....

◁

d) Recouvrement et partition



Définition :

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E (l'ensemble I peut être fini ou non).

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **recouvrement** de E si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

Si les A_i sont deux à deux disjoints, c'est à dire si, quand $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, on dit qu'on a un **recouvrement disjoint** de E .

Enfin, si on a un recouvrement disjoint et qu'aucun des ensembles A_i est vide, on parle de **partition** de E .

Exemples :

- ▶ \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- constituent un recouvrement de \mathbb{R} . Ce n'est pas une partition car ils ont 0 en commun.
- ▶ L'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs est une partition de l'ensemble des entiers.

- ▶ Quand on étudie des fonctions périodiques de période T , il est fréquent d'étudier la fonction sur un intervalle de la forme $[0, T]$.

On dit souvent qu'on prolonge l'étude par "périodicité", en répétant ce qu'on a fait sur une période à \mathbb{R} tout entier.

Ce que l'on utilise en réalité, c'est que les intervalles $A_i = [i \times T, (i + 1) \times T]$ forment un recouvrement de \mathbb{R} .

3) Opération sur les ensembles

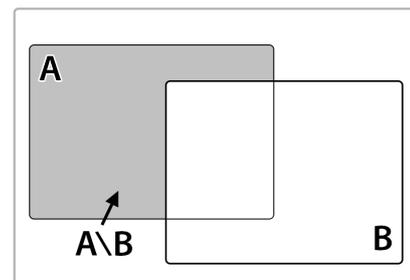
a) Complémentaire, différence

Définition :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .
On définit la **différence** de A et de B , notée $A \setminus B$ par

$$A \setminus B = \{x \in A \text{ t.q. } x \notin B\}$$

La barre oblique se lit "privé de" et on dit qu'on effectue de la différence de A par B .



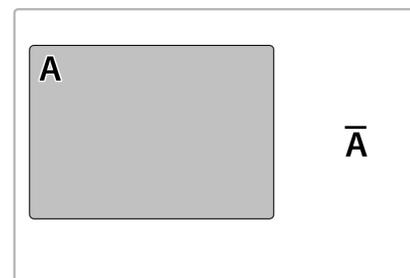
Exemple :

si on veut parler de nombres réels non nuls, on peut écrire $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, que l'on note le plus souvent \mathbb{R}^* .

Définition :

Soit E un ensemble et A une partie de E . On définit le **complémentaire** de A dans E (ou simplement le complémentaire de A si il n'y a pas d'ambiguïté), noté $E \setminus A$, \bar{A} ou A^c par

$$\bar{A} = \{x \in E; x \notin A\}$$



Exemple :

- ▶ dans \mathbb{R} , $\overline{[0, +\infty[} =$

- ▶ dans \mathbb{R} , $\overline{[0; 1]} =$

- ▶ dans $E = \llbracket 0, 5 \rrbracket$, avec $A = \{0, 2, 4\}$ on a $\bar{A} =$

b) Complémentaire, union et intersection

Proposition 1 : Lois de Morgan

Soient A et B deux ensembles, alors

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \text{ et } \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

▷ *Preuve* : Même preuve que dans le chapitre 1

◁

c) Produit cartésien

Définition :

Soit E et F deux ensembles. On note $E \times F$ l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$. Autrement dit :

$$E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$$

On dit alors que $E \times F$ est le **produit cartésien** de E par F .
Un élément de $E \times F$ est appelé **couple** de $E \times F$

Exemples :

- ▶ $\{0, 1\} \times \{1, 2\} = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$
- ▶ On peut représenter un produit cartésien sous forme de tableau à double entrée.
Par exemple $\{0, 1\} \times \{1, 2, 4\}$ peut se voir sous la forme :

Généralisation :

On peut faire le produit cartésien de plus que deux ensembles : $E \times F \times G$ sera par exemple l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in E, y \in F, z \in G$.

Si on a p ensembles reliés par des produits cartésiens, les éléments sont appelés des **p -uplets** ou des **p -listes**.

NOTATION

On note $E^2 = E \times E$ l'ensemble des couples de E , et pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$E^p = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$$

l'ensemble des p -listes d'éléments de E .

A noter :

PARENTHÈSES OU ACCOLADES ?

- ~ Pour les p listes et les produits cartésiens en général, l'ordre est important. On marque cet ordre en utilisant des parenthèses :
- ~ Le couple $(1, 2)$ est différent du couple $(2, 1)$.
- ~ En revanche, les accolades désignent l'ensemble des valeurs. Ainsi, $\{1, 2\}$ et $\{2, 1\}$ désigne le même ensemble...
- ~ A RETENIR : on utilise des parenthèses si l'ordre est important, des accolades si l'ordre est indifférent.

II Applications.

1) Généralités :

a) Définition et notation

Définition :

On dit que f est une **application** définie sur un ensemble E à **valeur** dans un ensemble F si à tout élément de E elle associe un unique élément de F .
On utilise la notation :

$$f : \begin{array}{l} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

NOTATION

On note F^E ou $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F .

Vocabulaire :

- ▶ $f(x)$ est appelé **image de x par f** .
- ▶ Soit $y \in F$. Si il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$, on dit que x est un **antécédent** de y par l'application f .

Remarques :

- ▶ Un élément de F peut avoir aucun, un ou plusieurs antécédents. En revanche, un élément de E a TOUJOURS une et une seule image.
- ▶ Cela ressemble fortement à une fonction... et pour cause : on confond souvent les deux termes ! Les différences sont subtiles (et hors programme), mais on utilisera le plus fréquemment le terme "fonction" quand on aura à faire à des applications définies sur un ensemble de réel et dont les images sont des nombres réels, et "applications" quand on travaille sur des autres ensembles.

b) Exemples :

- ▶ L'application qui "ne fait rien" est appelée **identité**. Ainsi, l'identité de E , notée Id_E est l'application :

$$\text{Id}_E : \begin{array}{l} E \rightarrow E \\ x \mapsto x \end{array}$$

- ▶ La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une application. On peut écrire que $\ln \in$

- ▶ L'opération consistant à dériver est une application.
Elle part de l'ensemble

Pour aller dans

- ▶ Soit E un ensemble et $A \subset E$. On définit l'application "indicatrice de A ", notée $\mathbf{1}_A$ par :

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Par exemple, si $A =]0, 3[$, $\mathbf{1}_A(2) =$ et $\mathbf{1}_A(-1) =$.

2) Opérations :

a) Restriction

Définition :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E$.
On appelle **restriction de f à A** , que l'on note parfois $f|_A$, l'application

$$f|_A : \begin{array}{l} A \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

Exemple :

L'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ peut être restreinte à \mathbb{R}_+ (si par exemple on veut considérer plus précisément la croissance de celle ci sur cet intervalle...)

b) Prolongement

Définition :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit A un ensemble tel que $E \subset A$.

On appelle **prolongement de f à A** toute application g telle que $g|_E = f$.

Remarque :

Il y a en général une infinité de prolongements possibles Par exemple :

- L'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{|x|} \end{array}$ est un prolongement à \mathbb{R} de l'application $\sqrt{} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) = \sqrt{x}$.

Graphiquement :

On pourrait également considérer

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Ce serait également un prolongement de $\sqrt{}$ à \mathbb{R} , dont la représentation graphique est

► Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

On peut montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et on peut ainsi prolonger f en 0 en posant $f(0) = 1$.

Lorsque la valeur choisie pour prolonger est la limite de la fonction en ce point, on dit qu'on a prolongé f "par continuité". En général, on ne renomme pas la nouvelle fonction obtenue, on précise simplement la nouvelle valeur :

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

3) Image directe, image réciproque

a) Image directe :

Définition :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$.

On appelle **image directe** de A par f , ou simplement **image de** A par f l'ensemble des images des éléments de A . On le note simplement $f(A)$ et on a

$$f(A) = \{f(a); a \in A\}$$

Autrement dit : $y \in f(A)$ si et seulement si $\exists x \in A, f(x) = y$.

Exemples :

Soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$. Alors :

► $f(\{2, 3\}) =$

► $f([0, 2]) =$

► $f([-1, 1]) =$

Méthode :

COMMENT DÉTERMINER $f(A)$?

Il n'existe pas de méthode valable pour toutes les applications.
Néanmoins, si f est une fonction "classique" dont l'étude est possible, le tableau de variation est un outil très important qui permet de déterminer facilement les ensembles images.

b) Image réciproque

Définition :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $B \subset F$. On appelle **image réciproque** de B l'ensemble de tous les antécédents des éléments de B .

On le note $f^{-1}(B)$ et on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

Autrement dit, $x \in f^{-1}(B)$ si et seulement si $f(x) \in B$.

Au secours !

C'EST QUOI CETTE NOTATION ?

La notation $f^{-1}(B)$ est de prime abord étrange. En effet, le $^{-1}$ est habituellement associé à l'inverse (puisque $x^{-1} = \frac{1}{x}$).

Ici, $f^{-1}(B)$ ne veut surtout pas dire $\frac{1}{f(B)}$! On a en réalité toujours l'idée "d'inverse", mais dans l'idée "d'aller dans l'autre sens" (plus rigoureusement : c'est l'idée de *réciproque*).

Déterminer $f^{-1}(B)$, c'est chercher les éléments de E qui ont leurs image dans B : c'est bien fonctionner "en sens inverse" du sens normal d'une application.

D'où le $^{-1}$.

Méthode :

DÉTERMINATION DE L'IMAGE RÉCIPROQUE

On cherche les éléments $x \in E$ vérifiant certaines conditions : il s'agira donc souvent de résoudre des équations ou des inéquations.

Exemple :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

► $f^{-1}(\{4\}) =$

► $f^{-1}([0, 2]) =$

► $f^{-1}([3, 9]) =$

► $f^{-1}([-2, -1]) =$

c) Images, antécédent et inclusion



Propriété 4 :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

(i) Soit A et B parties de E , alors

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$$

(ii) Soient A et B parties de F , alors

$$A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$$

▷ *Preuve* :

◁

III Injections, surjections et bijections

1) Applications injectives :

a) Définition

Pour toutes les application, si $x = y$, alors $f(x) = f(y)$. Lorsque la réciproque est vraie, on pose la définition suivante :



Définition :

Soit f une application définie sur un ensemble E à valeur dans F .
On dit que f est **injective** sur E si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Autrement dit : une f est injective signifie que deux images sont égales seulement si les antécédents sont égaux... ou encore que les éléments de F (l'ensemble d'arrivée) ont au plus un antécédent (c'est à dire aucun ou un seul)

Exemple :

► La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est injective sur \mathbb{R}_+ :

► La fonction $f : x \mapsto x^2$

Remarque :

La contraposée de la définition d'injective est intéressante également :

**Propriété 5 :**

f est injective sur un ensemble D si et seulement si :

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Autrement dit : deux éléments différents ont toujours une image différente...

b) Cas particulier de fonctions injectives :**Définition :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (resp. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$).

**Proposition 2 :**

► Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I . Alors f est injective.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :

On montre de même que si f est strictement décroissante, f est injective également.

Exemples :

- ▶ $x \mapsto e^x$ est injective sur \mathbb{R} car strictement croissante.
- ▶ $x \mapsto \ln(x)$ est injective sur \mathbb{R}_+^* car strictement croissante.
- ▶ $x \mapsto x^2$ est injective sur \mathbb{R}_- car elle est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- . Elle est également injective sur \mathbb{R}_+ car elle y est strictement croissante. Elle n'est pas injective sur \mathbb{R} .



Danger ! INJECTIF NE SIGNIFIE PAS STRICTEMENT MONOTONE

Il existe des fonctions injectives qui ne sont ni croissante, ni décroissante.

Par exemple :

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

est injective sur \mathbb{R}^* , mais elle n'est ni décroissante, ni croissante sur \mathbb{R}^* .



Méthode :

MONTRER QUE f EST INJECTIVE

Pour montrer qu'une application est injective on pourra :

1. Si c'est une fonction dérivable, étudier ses variations et voir si elle est strictement monotone.
2. On peut aussi résoudre l'équation à double inconnue $f(x) = f(y)$ et montrer que seul $x = y$ est possible.
3. On peut résoudre l'équation $y = f(x)$ et montrer qu'il ne peut jamais y avoir plusieurs solutions, quelle que soit la valeur de y .

2) Surjections :



Définition :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est dite **surjective** sur F si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent dans E .

Avec des quantificateurs : $\forall y \in F, \exists x \in E; y = f(x)$



Propriété 6 :

soit $f : E \rightarrow F$. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$

▷ *Preuve* : immédiat avec la définition de $f(E)$!

◁

Exemples :

▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

▶ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto x^2$



Méthode :

MONTRER LA SURJECTIVITÉ

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, on pose $y \in F$ et on résout l'équation d'inconnue $x : f(x) = y$

La lettre y est alors un paramètre : on va chercher à résoudre sans connaître ce y !

Si cette équation a toujours au moins une solution, quelle que soit la valeur de y , alors f est surjective et si on trouve au moins un y pour lequel il n'y a pas de solution, elle n'est pas surjective.

3) Bijections

a) Définition :



Définition :

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **bijjective** si et seulement si elle est à la fois surjective et injective.

Autrement dit, f est bijective si et seulement si tout élément de F admet un et un seul antécédent dans E .

Ce que l'on peut écrire sous la forme

$$\forall y \in F, \exists! x \in E; f(x) = y$$

Exemple :

► $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{matrix}$ n'est pas bijective car non surjective

► $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & e^x \end{matrix}$ est bijective.

► $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{matrix}$ n'est pas bijective (car non injective).

b) Bijection réciproque

Un des intérêts des bijections est d'avoir la possibilité de "revenir en arrière" :



Définition :

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. On appelle **bijection réciproque** l'application notée f^{-1} définie de la manière suivante :

pour tout $y \in F$ on note $f^{-1}(y)$ l'unique antécédent de y par f .

Ainsi : $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$

Remarques :

Dans la définition, on a utilisé la variable y pour parler d'un élément de F . Cela permet de la distinguer de la variable x , utilisé précédemment pour un élément de E .

Néanmoins, en pratique, on utilisera aussi la variable x pour f^{-1} , en précisant soigneusement l'ensemble d'appartenance.



Au secours !

ENCORE CETTE NOTATION !

A nouveau, on retrouve le f^{-1} d'apparence ambiguë, avec cette fois $f^{-1}(x)$.

Attention ainsi à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ et $f(x)^{-1}$!

A noter que cette notation est cohérente avec l'image réciproque : $f^{-1}(x)$ donne l'antécédent par f de x , tout comme $f^{-1}(A)$ donne l'ensemble des antécédents des éléments de A .



Theorème 2 :

Soit f une application de E dans F

f est bijective si et seulement si il existe $g : F \rightarrow E$ vérifiant SIMULTANEMENT les deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in E, g \circ f(x) = x$ (c'est à dire $g \circ f = Id_E$)

(ii) $\forall y \in F, f \circ g(y) = y$ (c'est à dire $f \circ g = Id_F$)

L'application g ainsi définie est en fait f^{-1} .

▷ *Preuve* :

◁

Exemples :

- ▶ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\exp(\ln(x)) = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\ln(e^x) = x$. Ainsi, \ln est la bijection réciproque de \exp .
- ▶ Pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et $(\sqrt{x})^2 = x$. Ainsi, la racine carrée est la bijection réciproque du carré, quand on restreint celui-ci à \mathbb{R}_+ .

c) Composition de bijection



Propriété 7 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives.

Alors $g \circ f$ est bijective, et sa bijection réciproque est

▷ *Preuve* :

◁

d) Représentation graphique de la réciproque :



Propriété 8 :

- Soit f une fonction bijective à valeur dans \mathbb{R} et soit f^{-1} sa bijection réciproque.
- Soit \mathcal{C}_f la représentation graphique de f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ celle de f^{-1} .
- Alors \mathcal{C}_f et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

En effet, soit $M \in \mathcal{C}_f$. Alors les coordonnées de M sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $y = f(x)$.

Ainsi, $f^{-1}(y) = x$, donc x est l'image de y par f^{-1} .

Autrement dit, le point M' de coordonnées $\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ est sur la courbe de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

e) Cas particuliers de bijections



Theorème 3 : théorème de la bijection monotone

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

Si f est strictement monotone sur E , alors f est bijective de E sur $f(E)$ et sa réciproque est de même monotonie.

▷ *Preuve* :

En particulier, si on a affaire à une fonction continue sur un intervalle, le théorème des valeurs intermédiaires permet de donner :



Theorème 4 :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f est bijective de I sur l'intervalle $J = f(I)$.

En particulier, si $I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, alors

- ▶ Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
- ▶ Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Remarque :

Dans le cas où I un intervalle avec une ou des bornes infinies ou ouvertes, on utilisera des limites et l'intervalle image est ouvert.

Exemple de bijection réciproque : racine n -ième :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$.

Celle-ci est définie et dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

Les variations de f dépendent de la parité de n :