Devoir Surveillé n°1 : corrigé

Exercice 1 (Une première équation)

Soit $P : x \mapsto x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

1. Trouver un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.
2. En remplaçant α par la valeur de la question précédente, déterminez $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$$
3. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$$

Exercice très proche du DM pour les deux premières questions

1. On observe que $P(1) = 0$. On peut prendre $\boxed{\alpha = 1}$.
2. En factorisant par $(x - 1)$ on obtient (avec système ou autre, cf corrigé DM)
$$\boxed{P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)}$$
3. On effectue le changement d'inconnue $X = e^x$. L'équation devient
$$X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = 0$$
D'après la question précédente, $X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = (X - 1)(X^2 - 2X - 8)$.
En outre, les racines de $X^2 - 2X - 8$ sont -2 et 4, et donc
$$X^3 - 3X^2 - 6X + 8 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+2)(X-4) = 0 \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -2 \text{ ou } X = 4$$
Finalement :
$$e^{3x} - 3e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1, e^x = -2 \text{ ou } e^x 4$$
la deuxième possibilité est écartée, et on en déduit l'ensemble des solutions de l'équation
$$\boxed{S = \{0, \ln(4)\}}$$

Exercice 2 (Des récurrences)

1. Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ \forall n \geq 0, u_{n+1} &= \dfrac{3u_n - 2}{u_n} \end{cases}$$
Calculez les premiers termes de la suite afin de donner une conjecture sur la valeur de u_n, puis démontrez cette conjecture par récurrence.
2. On appelle suite de Fibonacci la suite définie par
$$\begin{cases} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 2 \\ \forall n \geq 1, u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \end{cases}$$
Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq n$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

---

1. On calcule $u_1 = \dfrac{3u_0 - 2}{u_0} = \dfrac{1}{1} = 1$, puis $u_2 = 1$ et éventuellement $u_3 = 1$: il semblerait donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Démontrons donc par récurrence que la propriété $P(n)$: $u_n = 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. <u>Initialisation :</u> On a bien $u_0 = 1$, donc $P(0)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est à dire $u_n = 1$.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{u_n} = \dfrac{3 \times 1 - 2}{1} = 1$
La propriété $P(n+1)$ est donc vérifiée.
<u>Conclusion :</u> Par le principe de récurrence, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1.}$
2. On va procéder par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P(n)$ la proposition $u_n \geq n$.

Initialisation : On a $u_1 = 1 \geq 1$ et $u_2 = 2 \geq 2$, donc $P(1)$ et $P(2)$ sont vérifiées.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies.
On a donc $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$ (HR).
Par somme d'inégalité, il vient

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq n + n + 1 = 2n + 1$$

Il suffit maintenant de montrer que $2n+1 \geq n+2$.
Or $2n+1-(n+2) = n-1$ et $n \geq 1$, donc $2n+1-(n+2) \geq 0$ et $2n+1 \geq n+2$
On obtient bien $P(n+2)$: $u_{n+2} \geq n+2$

Conclusion : Par le principe de récurrence (double), $\boxed{u_n \geq n \text{ pour tout } n \geq 1.}$
Pour la limite, comme $u_n \geq n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit, par "théorème de gendarmes" ou "par minoration" que $\boxed{\lim u_n = +\infty}$.

Exercice 3 (Ensembles de définition)

Déterminez les ensembles de définition des fonctions suivantes. On justifiera soigneusement la réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$
2. $f_3 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$
3. $f_4 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}}$

---

1. La fonction racine carrée étant définie sur $\mathbb{R}_+$, $f_1(x)$ existe si et seulement si $x^2-4 \geq 0$. Or x^2-4 a pour racines 2 et -2, donc est positif à l'extérieur de celles-ci.
Ainsi $\boxed{f_1 \text{ est définie sur }]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[.}$
2. Comme le logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on cherche quand $\dfrac{2+x}{3-x}$ est strictement positif.
Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$2+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{2+x}{3-x}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

Ainsi, $\boxed{f_3 \text{ est définie sur }]-2;3[}$
(Pardon pour la numerotation ! j'avais prévu un f_2 à la base, et je l'ai supprimé sans renommer mes fonctions...)
3. Même problématique que f_3 : on cherche quand $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$ est définie et est positif ou nul.
Les racines de x^2-1 sont 1 et -1, celles de x^2+3x-4 sont 1 et -4.
Un tableau de signe va à nouveau nous aider :

x	$-\infty$		-4		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x^2-1}{x^2+3x-4}$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

Ainsi, $\boxed{f_4 \text{ est définie sur }]-\infty, -4[\cup[-1;1[\cup]1;+\infty[}$

Exercice 4 (Un système avec un paramètre)

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant, d'inconnues x, y, z, en fonction des valeurs de m :

$$\begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ x-2y+2z &= m \\ x+y-z &= 1 \end{cases}$$

A nouveau, exercice très proche du DM. On procède de la même façon, en résolvant le système le plus loin possible avant de faire des cas pour m.

$$\begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ x-2y+2z &= m \\ x+y-z &= 1 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ 7y-7z &= 1-3m \\ 2y-2z &= 2 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow \frac{7}{2}L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ 7y-7z &= 1-3m \\ 0 &= 3m+6 \end{cases}$$

Le système est de rang 2 et admet des solutions si et seulement si $3m+6=0$. Ainsi :
Si $\mathbf{m \neq -2}$: le système est incompatible et l'ensemble des solutions est $\boxed{S=\emptyset}$
Si $\mathbf{m = -2}$: le système est compatible et devient :

$$\begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ 7y-7z &= 7 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Il y a une inconnue paramètre et cela donne :

$$\begin{cases} 3x+y-z &= 1 \\ 7y-7z &= 7 \\ 0 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= z+1 \\ z &\in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exercice 5 (Polynôme du second degré avec paramètre)

Soit un nombre réel $m \neq 0$ et soit

$$P_m(x) = (m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1)$$

On veut étudier ce polynôme en fonction de m et pour cela on pose l'équation :

$$(m+1)x^2 - \frac{x}{m} - (m-1) = 0 \qquad (E)$$

(c'est à dire l'équation $P_m(x)=0$)

1. **Cas particulier :**
   Résoudre l'équation $P_m(x)=0$ dans le cas $m=-1$.
2. **Résolution de (E) :**
   On suppose à partir de maintenant que $m \neq -1$.
   (a) Calculer le discriminant de (E) en fonction de m et l'écrire sous la forme $\left(\frac{A}{B}\right)^2$ où A et B sont des réels qui dépendent de m.
   (Indication : pour le numérateur, on pourra reconnaitre une identité remarquable).
   (b) Déterminer, en fonction de m, l'ensemble des solutions de l'équation (E). On simplifiera les résultats le plus possible.
3. **Etude du signe de $P_m(x)$:** On suppose toujours dans cette question que $m \neq -1$.
   (a) Soient $x_1 = \frac{1-m}{m}$ et $x_2 = \frac{m}{m+1}$.
   On pose $f(m) = x_1 - x_2$. Déterminer en fonction du réel m le signe de $f(m)$.
   (on n'hésitera pas à faire un tableau de signe...)
   (b) En déduire, en fonction de m, l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tel que $P_m(x) \geq 0$.
   On procèdera à une disjonction de cas selon m pour les 4 cas possibles.

1. Si $m = -1$, $P_m(x) = 0$ devient une équation du premier degré :

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -2}$$

2. (a) On obtient $\Delta = \dfrac{1}{m^2} + 4(m+1)(m-1) = \dfrac{4m^4 - 4m^2 + 1}{m^2}$

   On repère une identité remarquable au numérateur :

$$\Delta = \frac{4(m^2 - \frac{1}{2})^2}{m^2}$$

   Ce qui constitue bien la forme demandée.

   Remarquez qu'on peut également écrire :

$$\boxed{\Delta = \frac{4(m - \frac{1}{\sqrt{2}})^2(m + \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{m^2}}$$

   (b) D'après le calcul précédent, on a $\Delta \geq 0$ quel que soit m, avec $\sqrt{\Delta} = \dfrac{2m^2 - 1}{m}$ ou $-\dfrac{2m^2 - 1}{m}$. Dans tous les cas, on obtient deux racines, confondues lorsque $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

   $x = \dfrac{\frac{1}{m} + \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \dfrac{m}{m+1}$ ou $x = \dfrac{\frac{1}{m} - \frac{2m^2-1}{m}}{2(m+1)} = \dfrac{1-m}{m}$

$$\boxed{(E) \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{m}{m+1}, \frac{1-m}{m} \right\}}$$

3. (a) On met sur le même dénominateur, et il vient, :

$$f(m) = \frac{1-m}{m} - \frac{m}{m+1} = \frac{1 - 2m^2}{m(m+1)}$$

   Un tableau de signe rapide donne alors que :

   $\boxed{f(m) \leq 0 \text{ pour } m \in]-\infty, -1[\cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[,}$

   et $\boxed{f(m) \geq 0 \text{ pour } m \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]}$

   (b) L'ensemble des x tel que $P_m(x) \geq 0$ dépend des racines du polynôme étudié précédemment.

   On sait qu'il va être du signe de $m+1$ à l'extérieur des racines : reste à repérer ce qu'est "l'extérieur des racines", c'est à dire laquelle des deux racines est la plus petite.. et combiner ça avec le signe de $m+1$!

   Il y a 4 cas à distinguer.

1er cas : Si $m = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:

C'est le cas de racine double : le polynome étudié avec (E) est du signe de $m+1$.

Dans ces deux cas, $m + 1 \geq 0$ donc $\boxed{P_m(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

2eme cas : Si $m < -1$:

D'après l'étude sur $f(m)$ effectuée précédemment, on a $\frac{m-1}{m} + \frac{m}{m+1} > 0$, donc $\frac{m}{m+1} > \frac{1-m}{m}$ et comme $m+1 < 0$, c'est la partie "entre les racines" qui nous intéresse, d'où :

$$\boxed{P_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1-m}{m}, \frac{m}{m+1}\right]}$$

3eme cas : si $m \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Alors $m+1 > 0$ et $\frac{m}{m+1} > \frac{1-m}{m}$ et l'ensemble qui nous intéresse est l'exterieur des racines :

$$\boxed{P_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1-m}{m}\right] \cup \left[\frac{m}{m+1}, +\infty\right[}$$

4eme cas : Si $m \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right[\cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$

Alors $m+1 > 0$ et $\frac{m}{m+1} < \frac{1-m}{m}$, et on a enfin :

$$\boxed{P_m(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{m}{m+1}\right] \cup \left[\frac{1-m}{m}, +\infty\right[}$$