

Fonctions usuelles

I Famille exponentielle

1) Logarithme népérien

a) Construction et premières propriétés



Définition :

On appelle **logarithme népérien**, notée \ln , l'unique fonction définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* telle que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

Remarques :

- ▶ On admet pour le moment l'existence et l'unicité de cette fonction : on montrera que cela provient de la continuité de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+
- ▶ On verra dans le chapitre intégration que l'on peut écrire :

$$\forall x > 0, \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Cette fonction possède les propriétés remarquables ci dessous, à connaître impérativement !



Theorème 1 :

Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

▶ $\ln(ab) =$

▶ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$

▶ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$

▶ $\ln(a^n) =$

▷ *Preuve* :

? Le saviez-vous ?

JOHN NAPIER



John Napier, francisé en "Jean Neper", naît en 1550 en Ecosse. Issus d'une famille noble, il a la possibilité d'étudier dans les plus prestigieuses université de son époque et voyage dans toute l'Europe pour perfectionner son savoir.

On lui prête de nombreux talents : mathématicien, ingénieur (il va inventer des "machines secrètes" dans le but de défendre l'Ecosse contre une invasion espagnole), theologien.... et même sorcier !

Ses plus célèbres inventions sont les "batons de Neper" qui remplacent efficacement l'abaque dans le calcul, et bien sûr le logarithme (contraction de *logos arithmeticos* : relation entre les nombres). Il également précurseur dans l'utilisation des nombres binaires pour faciliter le calcul, préfigurant ce qui est naturellement utilisé aujourd'hui dans les ordinateurs....

b) Etude de \ln



Propriété 1 :

- ▶ La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$

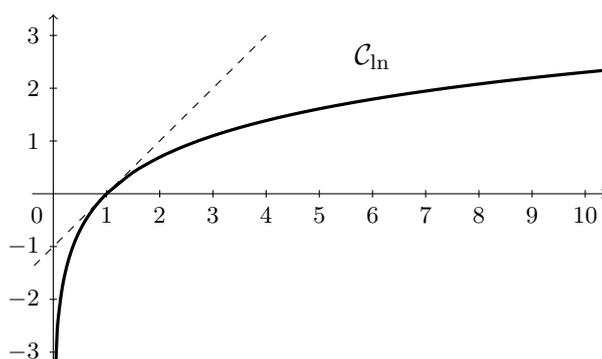
▷ Preuve :

◁



Corolaire 1 :

La fonction \ln est une bijection de sur



A noter enfin cette propriété très pratique, liée à la concavité de \ln :



Propriété 2 :

$\hookrightarrow \forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$

▷ *Preuve* :

◁

c) Logarithme dans une autre base



Définition :

Soit $b > 0$. On appelle logarithme en base b et on note \log_b la fonction

$$\log_b : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \end{array}$$



Propriété 3 :

\hookrightarrow Les résultats obtenus dans la propriété 1 pour \ln sont encore valables avec \log_b .

▷ *Preuve* : Par exemple $\log_b(xy) =$

◁

Exemples :

- ▶ si on prend $b = e$, on a $\ln(e) = 1$ (cf la construction d'exponentielle), d'où

$$\log_e(x) = \frac{\ln(x)}{1} = \ln(x)$$

- ▶ En physique chimie, on utilise fréquemment le logarithme en base 10, noté simplement \log au lieu de \log_{10} . On parle alors de **logarithme décimal**.

On a alors $\log(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$. Ainsi $\log(1000) =$

- ▶ En informatique, on utilisera également \log_2 , appelé **logarithme binaire**. Cette fois, on a $\log_2(x) = 1$ pour $x =$

2) Exponentielle

a) Construction



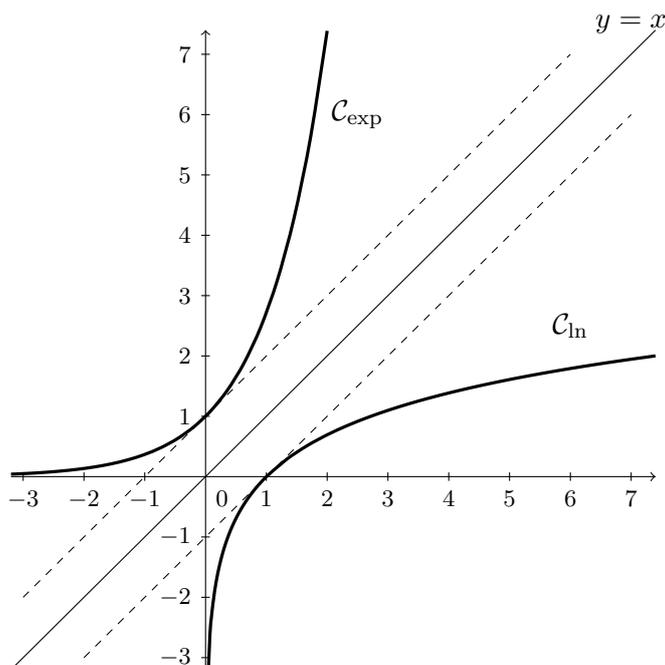
Définition :

On appelle fonction **exponentielle**, notée \exp , la bijection réciproque de la fonction \ln . La fonction \exp est une fonction strictement croissante, définie sur \mathbb{R} et à valeur dans \mathbb{R}_+^* .

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le nombre $\exp(x)$, noté également e^x , est l'unique réel dont le logarithme népérien vaut x : $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$.

Courbe représentative :

Etant des bijections réciproques l'une de l'autre, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Par construction des bijections réciproques, on a donc :



Propriété 4 :

- Pour tout $x > 0$, on a $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout réel x , on a $\ln(e^x) = x$.



Corolaire 2 :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in]0 + \infty[$, on a

- $\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$;
- $e^a = y \Leftrightarrow a = \ln(y)$.
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$;

Remarque :

On a $e^0 = 1$ et $e^1 = e$ où e est appelé *nombre d'Euler* (parfois *constante de Neper*). On peut montrer que ce nombre est irrationnel (et même transcendant...) et on donne la valeur approchée $e \simeq 2,718$.

b) Propriétés

D'après le théorème de dérivation réciproque (voir l'exemple dans le chapitre précédent), on obtient



Proposition 1 :

La fonction \exp est dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est \exp .

De plus, à partir des propriétés de calculs sur le \ln , on obtient directement



Propriété 5 :

Soit a, b deux réels et n un entier relatif. On a

► $e^{a+b} =$

► $e^{a-b} =$

► $e^{-a} =$

► $(e^a)^n =$

► *Preuve* :

◀

Enfin, tout comme \ln , on a une comparaison intéressante issue de la convexité :



Propriété 6 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^x \geq 1 + x$$

► *Preuve* : cf TD

◀

3) Puissance réelles :

a) Racines n -ième

On se reportera à l'exemple donné dans le chapitre AL2- Ensemble et application pour la construction de la racine n -ième.



Définition :

Soit $n > 0$. **Si n est pair :** Pour tout $x \geq 0$, on appelle racine n -ième de x et on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel **positif** qui, élevé la puissance n , donne x .

En particulier, pour $n = 2$, $\sqrt[2]{x}$ est noté simplement \sqrt{x} et est appelé racine de x .

Si n est impair : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle racine n -ième de x et on note $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel (positif ou négatif) qui, élevé la puissance n , donne x .

Exemples :

$$\sqrt[3]{8} = \quad , \quad \sqrt[3]{-8} = \quad , \quad \sqrt[10]{1024} =$$

b) Puissances réelles :

On cherche à généraliser la notion de puissance, définie pour les entiers relatifs, aux nombres réels. Pour tout $x > 0$, on sait que $\ln(x^n) = n \ln(x)$ et donc $e^{\ln(x^n)} = e^{n \ln(x)}$.

Ainsi, $x^n = e^{n \ln(x)}$. Ceci conduit à la définition suivante :



Définition :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ le nombre x^α par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Correspondances avec les fonctions racines n -ième :

Prenons $x > 0$ et regardons x^α avec $\alpha = \frac{1}{n}$.

c) Propriétés :



Propriété 7 :

On vérifie facilement les propriétés de calculs suivantes :

1. pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
2. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pour tout $x > 0$, $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ et $(x^\alpha)^\beta =$
3. Pour tout $x > 0$ et tout réel α , $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

▷ Preuve :



Propriété 8 : Dérivabilité

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a

$$\forall x > 0, \varphi'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

▷ *Preuve* :

◁

d) Etude et représentation graphique

4) Croissances comparées

Il est intéressant de comparer le comportement à l'infini de ces trois familles de fonctions, qui divergent toutes vers $+\infty$ mais de façons différentes. On dispose pour cela des résultats suivants :

Proposition 2 :

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) =$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\exp(x)} = \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x =$$

▷ Preuve :

◁

Soit maintenant $a > 0$ et $b > 0$.

On cherche à calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a}$:

Corolaire 3 :

Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a |\ln(x)|^b = 0$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^{bx}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^a e^{bx} = 0$$



Méthode :

UTILISER LES CROISSANCES COMPARÉES

Les croissances comparées sont fréquemment utilisées pour lever certaines formes indéterminées impliquant des puissances, des logarithmes et des exponentielles.

Il faudra donc penser à ces formules en ayant en tête les points suivants :



Elles ne concernent que la comparaison d'un ln avec une puissance, d'une puissance avec exp, ou d'un ln avec exp. Toute autre comparaison n'est pas une croissance comparée.

Par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$ ne se justifie pas par "croissances comparées".



Chaque fois qu'on l'utilise, on précisera bien "par croissances comparées"



On peut bien sûr les utiliser sous leur forme inverse, toujours en disant "par croissances comparées" et sans forcément préciser que l'on est passé par l'inverse.

Par exemple $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x^{100}} = +\infty$.

II Trigonométrie réciproque

1) Arctan

a) Construction :

On considère la fonction tan. Elle n'est clairement pas strictement monotone sur son ensemble de définition, mais on peut la considérer sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ seulement.

Comme $\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on a

$$\tan'(x) =$$

Ainsi, tan est strictement croissante sur l'intervalle I .

$$\text{De plus, } \lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$$

Comme tan est continue, on a donc, par

$$f(I) = \mathbb{R}$$

Le théorème de la bijection monotone garantit donc que tan est bijective de $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R}



Définition :

On appelle arctan la fonction bijection réciproque de la restriction à $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ de tan.

arctan est ainsi définie sur \mathbb{R} , à valeur dans $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, et est strictement croissante.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, arctan(x) donne l'unique "angle" $\theta \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta) = x$.

Exemple :

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \arctan(0) = 0, \quad \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

b) Propriétés et représentation graphique



Propriété 9 :

La fonction arctan est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan(-x) = -\arctan(x)$$

▷ *Preuve* :

◁



Propriété 10 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) =$$

▷ *Preuve* :

◁

Représentation graphique :

c) Dérivée :

On a vu dans le chapitre 2 que si une fonction f est bijective et que f est dérivable en un point x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ avec

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ici, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$ donc arctan est dérivable sur \mathbb{R} .

Appliquons la formule :

d'où le résultat suivant :



Proposition 3 :

La fonction arctan est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

2) Arcsin

a) Construction :

b) Propriétés et représentation graphique :

c) Dérivée :

3) Arccos

a) Construction :

b) Propriétés et représentation graphique :

c) Dérivée :

4) Bilan :

On dispose maintenant de 3 "nouvelles" fonctions, à ne pas mélanger.

Nom	Bijection de	Ens. de définition	Ensemble image	Dérivée
Arctan	$\tan_{\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[}$	\mathbb{R}	$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$	sur $\mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
Arcsin	$\sin_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]}$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$	sur $] -1; 1[: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arccos	$\cos_{\left[0; \pi \right]}$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	sur $] -1; 1[: x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

III Cosinus et sinus hyperbolique

1) Définition



Définition :

► On appelle **cosinus hyperbolique**, notée ch, la fonction

$$\text{ch} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

► On appelle **sinus hyperbolique**, noté sh, la fonction

$$\text{sh} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Remarque :

Ces fonctions tirent leur nom de leur ressemblance avec les formules d'Euler, que l'on verra dans le chapitre sur les complexes :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Les propriétés sont en outre assez proches de leurs homologues trigonométriques...



Propriété 11 :

- la fonction ch est une fonction paire.
- la fonction sh est une fonction impaire.

▷ *Preuve* :

◁

Remarque :

On a vu en exemple d'analyse synthèse que toute fonction peut s'écrire comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Si on applique cette décomposition à exp, on obtient alors que ch est la partie paire d'exponentielle, et sh la partie impaire.



Propriété 12 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$$

▷ *Preuve* :

◁

2) Dérivée et variation

a) Cos hyperbolique

**Propriété 13 :**

La fonction ch est dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ch}'(x) =$$

▷ *Preuve* :

◁

Etudions le signe de ch' pour en déduire le tableau de variation :

b) Sinus hyperbolique



Propriété 14 :

La fonction sh est dérivable sur \mathbb{R} et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{sh}'(x) =$$

▷ *Preuve* :

◁

Etudions le signe de sh' pour en déduire le tableau de variation :

3) Représentations graphiques :