Analyse- Chapitre 2 : Fonctions usuelles
Feuille d'exercices

1 Encore un peu de bijectivité

Exercice 1 :

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est bijective de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = x\ln(x) - \dfrac{1}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$.

1. Montrer que f est dérivable et strictement monotone sur I.
2. En déduire que f est une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
3. On note g la réciproque de f. Calculer $g(-1)$ et $g'(-1)$.

2 Autour de la famille exponentielle

Exercice 3 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

1. $2^{x^2} = 3^{x^3}$
2. $2^{x+1} + 4^x = 15$
3. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

Exercice 4 :

Soit f la fonction $x \mapsto x^x$.

1. Déterminez l'ensemble de définition de f et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
2. On prolonge f par continuité en posant $f(0) = 1$.
   a) justifiez que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{e^u - 1}{u} = 1$
   b) Etudiez le taux de variation en 0 et montrez que la courbe admet une tangente verticale en 0.
3. Etudiez les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 5 :

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 8^x &= 10y \\ 2^x &= 5y \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y &= 7 \\ \log x + \log y &= 1 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x^2 - y^2 &= 12 \\ \ln x - \ln y &= \ln 2 \end{cases}$$

3 Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 6 :

Calculer :

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right), \operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ et } \operatorname{Arctan}(-\sqrt{3})$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right), \quad \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right),$$

$$\operatorname{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right), \quad \operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{-27\pi}{13}\right)\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(\frac{-11\pi}{5}\right)\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Exercice 7 :

Soit $\psi\colon x \mapsto \operatorname{Arccos}\big(\cos(x)\big)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de ψ.
2. Donner un intervalle I sur lequel ψ se simplifie de manière immédiate et préciser cette expression.
3. Étudier la périodicité et la parité de ψ.
4. Tracer la courbe représentative de ψ.

Exercice 8 :

Justifiez que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ et en déduire que :

$$\forall x \in [-1;1],\ \operatorname{Arccos}(x) + \operatorname{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9 :

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$. Quelle valeur pour $x < 0$?
2. Montrez que pour tout $x \in]-1,1[$, $2\arctan x = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

Exercice 10 :

Soit $f : x \mapsto \arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$.

1. Déterminez l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de f.
2. Calculez sa dérivée et en déduire une expression plus simple de f.

Exercice 11 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition, et calculer f'.
3. En déduire une expression plus simple de $f(x)$.

Exercice 12 :

Montrer que pour tout $x \in [0;1]$, on a $\operatorname{Arccos}(2x^2 - 1) = 2\operatorname{Arccos}(x)$.

4 Fonction hyperboliques :

Exercice 13 :

Résoudre les équations suivantes

1. $\operatorname{sh}(x) = 1$
2. $\operatorname{ch}(x) = 2$
3. $5\operatorname{ch}(x) - 3\operatorname{sh}(x) = 4$
4. $3\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = 1$

Exercice 14 :

Montrer que tout $x \in \mathbb{R}$:

1. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$.
2. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y)$.

Exercice 15 :

Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[, \operatorname{sh}(x) \geq x$ et en déduire que pour tout $x \in [0;+\infty[, \operatorname{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 16 :

Soient $A_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$.

1. Calculez $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$.
2. En déduire les valeurs de A_n et B_n.