Algèbre - Chapitre 3 : Calcul algébrique : sommes et produits
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Ecrire les sommes ou produits suivants à l'aide du symbole $\sum$ ou $\prod$:

1. $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3$.
2. $4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + \ldots + 4x_n + 4x_{n+1}$.
3. $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \ldots \times (20)$
4. $x_0 + x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n}$.
5. $\cos(x)\cos(2x)\cos(3x) \times \ldots \times \cos(nx)$
6. $x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n-1} + x_{2n}$.
7. $a_p^3 a_{p+1}^3 \ldots a_n^3$

Exercice 2 :

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} k$
2. $\displaystyle\sum_{k=3}^{7} (k-3)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} (k-1)^2$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} 1$
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} 6$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} (2k+1)$

Exercice 3 :

Transformer les sommes suivantes sous la forme proposée entre parenthèses :

1. $\displaystyle\sum_{p=0}^{9} a_{p+4}$ (forme : $\displaystyle\sum_{j=\square}^{\square} a_j$).
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} b_{2k} + \sum_{j=0}^{5} b_{2j+1}$ (forme : $\displaystyle\sum_{i=\square}^{\square} b_i$).
3. $\displaystyle\sum_{k=3}^{8} a_k + \sum_{j=1}^{6} b_{j-1}$ (forme : $\displaystyle\sum_{i=0}^{\square} a_\square + b_\square$).
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^{n-k}$ (forme : $\displaystyle\sum_{k=\square}^{\square} x^k$).
5. $\displaystyle\sum_{p=1}^{5} p\, x^p$ (forme $x\displaystyle\sum_{q=0}^{\square} \square x^q$).

Exercice 4 :

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

1. Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

2. En déduire S_n et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 5 :

Calculez :

1. $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 2}} i + 2j$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq i \leq 2 \\ 0 \leq j \leq 2}} 2^{i+j}$
3. $\displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq 5} ij$
4. $\displaystyle\sum_{i+j=4} (-1)^i i^j$

Exercice 6 : Produit de sommes finies

Soient m, n deux entiers et $(a_i)_{1\leq i\leq m}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ deux familles de réels (ou complexes). Montrez la formule suivante
$$\sum_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

Exercice 7 :

Soit $q \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$. On se propose de démontrer la formule du cours sans utiliser de récurrence.

1. Calculez S_n pour $q = 1$
2. On suppose maintenant $q \neq 1$.
   a) En faisant apparaitre une somme télescopique, calculez $(1-q)S_n$
   b) En déduire que pour $q \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
3. Exprimez en fonction de n la somme $\sum_{k=1}^{n} q^k$, puis $\sum_{k=p}^{n} q^k$ pour tout $p \leq n$.
4. Calculez les sommes doubles suivantes :

$$S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2^{i+j} \text{ et } T = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^{i-j}$$

Exercice 8 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{4n+1}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Trouvez trois réels a, b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$
2. En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et calculez $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 9 :

Soit $S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$

Donnez la valeur explicite de S_n (sans le signe $\sum$) et montrez que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\ln(2)$.

Exercice 10 :

Exprimer à l'aide de la fonction factorielle les produits suivants :

$$\prod_{k=1}^{n}(k^2); \quad \prod_{k=1}^{n}(2k) \text{ et } \prod_{k=0}^{n}(2k+1).$$

Exercice 11 :

Déterminez les valeurs de $P_1 = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ et de $P_2 = \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$