Somme, appli, études de fonctions
DM 2

Exercice 1 (Etude de fonction - bijection) Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. **Partie 1 : Etude de f**
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Montrez que f est paire.
   c) Justifiez que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer l'expression de sa dérivée.
   d) Établir le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   e) Tracer la courbe représentative de f en faisant apparaitre explicitement les propriétés remarquées dans l'étude.
2. **Partie 2 : Bijectivité**
   a) Justifiez que f restreinte à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
   b) Donner le tableau de variation de f^{-1}, complété par les limites. (indication : ne cherchez surtout pas à dériver...)
   c) Tracer la courbe de f^{-1}.
3. **Partie 3 : expression explicite de la réciproque**
   a) Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. On considère l'équation

   $$x^2 - \frac{1}{y}x + 1 = 0$$

   Justifiez que $1 - 4y^2 \geq 0$ et en déduire que cette équation admet deux solutions réelles, que l'on notera r_1 et r_2.
   b) Montrez que r_1 et r_2 sont positives, et que $r_1 r_2 = 1$.
   c) En déduire que la plus grande des deux solutions est nécessairement supérieur ou égale à 1.
   d) Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. Résoudre l'équation

   $$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y$$

   On pourra poser $X = e^x$.
   e) Déterminez f^{-1}.

Exercice 2 Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

1. Déterminez deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$$

2. En déduire la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

Exercice 3 Soit un entier $n \geq 1$. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminez les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$