DEVOIR MAISON 2 - *Sur les séries*

Corrigé

Autour des fonctions Zêta et Zêta alternée de Riemann

A.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann.
Ainsi d'après le cours :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x} \text{ converge si et seulement si } x > 1.}$$

A.2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Si $x \leqslant 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0. \end{cases}$
On en déduit que la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge grossièrement.
Si $x > 0$ alors la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^x} \geqslant 0$ et la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0.
Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \text{ converge si et seulement si } x > 0.}$$

B.1. La fonction $t \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc l'intégrale $\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \mathrm{d}t$ est bien définie.
On a d'une part par linéarité :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(-1)^{\ell-1}}{\ell}.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1+t}$ (somme géométrique de raison $-t \neq 1$).
On a donc également :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \left[\ln|1+t|\right]_0^1 = \ln 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t.}$$

B.2. On a déjà vu que puisque $1 > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = F(1)$.
De plus, comme pour tout $t \in [0,1]$, $1+t \geqslant 1 > 0$, on a par positivité puis croissance de l'intégrale (on a bien $0 \leqslant 1$) :

$$\left|(-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{n+1} \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{n+2} t^{n+2}\right]_0^1 = \frac{1}{n+2}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$, on en déduit par encadrement :

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t = 0 \ \text{ d'où } \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Par unicité de la limite, on en déduit que :

$$\boxed{F(1) = \ln 2}$$

C.1. On a $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t = [\sin(t)]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$.
On a $J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3\right] = \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{24}$.
Pour calculer J_1, faisons deux intégrations par parties successives, possibles car les fonctions $t \mapsto t^2$, $t \mapsto \sin(t)$, $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\cos(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{\pi/2} t^2 \cos(t)\mathrm{d}t = \left[t^2 \sin(t)\right]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4} - 2\left(\left[-t\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} - 2I_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2},\ J_0 = \frac{\pi^3}{24},\ I_1 = 1 \text{ et } J_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.}$$

C.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \cos^n(t)$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, positive car pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geqslant 0$ et n'est pas identiquement nulle puisque $\cos(0) = 1$ donc par stricte positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t > 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n > 0.}$$

C.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme les fonctions $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\cos(t)\mathrm{d}t = \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\sin(t)\sin(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)(1 - \cos^2(t))\mathrm{d}t = (n+1)(I_n - I_{n+2}). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n.}$$

C.4.(a) La fonction $f : t \mapsto -\sin t$ est deux fois dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et on a $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f''(t) = \sin(t) \geqslant 0$.
On en déduit que $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto -\sin t \text{ est convexe sur } \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]}$.
Par conséquent, le graphe de cette fonction se trouve en-dessous de la corde reliant les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Or, la droite reliant les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$ est la droite passant par les points $(0, -\sin(0)) = (0, 0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$, c'est la droite d'équation $y = -\frac{2}{\pi}x$.
On en déduit que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $-\sin(t) \leqslant -\frac{2}{\pi}t$. Ainsi :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right],\ t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t).}$$

C.4.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant t^2 \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(t)$ par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$

$$\text{donc } 0 \leqslant t^2\cos^n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{4}\cos^n(t)(1-\cos^2(t)) \text{ puisque } \cos^n(t) \geqslant 0.$$

Par positivité, croissance et linéarité de l'intégrale (on a bien $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$), on en déduit :

$$\boxed{0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+2}).}$$

C.4.(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En divisant l'inégalité obtenue par $I_n > 0$, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{J_n}{I_n} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{n+2}}{I_n}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{\pi^2}{4(n+2)}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi^2}{4(n+2)} = 0$, on en déduit par le théorème de limite par encadrement que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{J_n}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$$

C.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons deux intégrations par parties successives, possibles car les fonctions $t \mapsto t$, $t \mapsto \cos^{n+2}(t)$, $t \mapsto \dfrac{1}{2}t^2$ et $t \mapsto \cos^{n+1}(t)\sin(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t = \left[t\cos^{n+2}(t)\right]_0^{\pi/2} + (n+2)\int_0^{\pi/2} t\cos^{n+1}(t)\sin(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + (n+2)\left(\left[\frac{1}{2}t^2\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} t^2(-(n+1)\cos^n(t)\sin^2(t) + \cos^{n+2}(t))\mathrm{d}t\right) \\
&= 0 + \frac{(n+2)(n+1)}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\cos^n(t)(1-\cos^2(t))\mathrm{d}t - \frac{n+2}{2}\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{n+2}(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(n+2)(n+1)}{2}(J_n - J_{n+2}) - \frac{n+2}{2}J_{n+2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)J_n - (n+2)^2 J_{n+2}}{2}.}$$

En multipliant l'égalité précédente par $\dfrac{2}{(n+2)^2 I_{n+2}}$, on obtient $\dfrac{2}{(n+2)^2} = \dfrac{n+1}{n+2}\dfrac{J_n}{I_{n+2}} - \dfrac{J_{n+2}}{I_{n+2}}$.

Comme $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n}$, on en déduit :

$$\boxed{\frac{J_n}{I_n} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}} = \frac{2}{(n+2)^2}.}$$

C.6. Soit $N \in \mathbb{N}$. En sommant l'égalité précédente, on a par télescopage :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{2}{(n+2)^2} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{J_n}{I_n} + \frac{J_{n+1}}{I_{n+1}} - \frac{J_{n+1}}{I_{n+1}} - \frac{J_{n+2}}{I_{n+2}}\right) = \frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} - \frac{J_{N+1}}{I_{N+1}} - \frac{J_{N+2}}{I_{N+2}}.$$

Par décalage d'indice, on a de plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+2)^2} = \sum_{n=2}^{N+2} \frac{1}{n^2}$.

Comme la suite $\left(\dfrac{J_n}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on a par passage à la limite $N \to +\infty$:

$$2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{J_0}{I_0} + \frac{J_1}{I_1} = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2}{3} - 2.$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) - 1$, on en déduit $\zeta(2) = 1 + \dfrac{\pi^2}{6} - 1 = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Ainsi :

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

D. Notons que le produit de Cauchy de l'énoncé n'est pas tout-à-fait celui du cours car les séries sont ici définies à partir de $n = 1$.

On le retrouve en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ a_n \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$ et $\beta_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 0 \\ b_n \text{ si } n \geqslant 1 \end{cases}$

D.1. Si $x > 1$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument car la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann avec $x > 1$.
La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} c_n(x)$ est donc le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes donc d'après le cours :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 2} c_n(x) \text{ converge (absolument)}}$$

et on a :

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} c_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right) = \big(F(x)\big)^2.}$$

D.2. On a :

$$c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k)^x} = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x (n-k)^x}.$$

Comme pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{1}{k^x(n-k)^x} \geqslant 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x(n-k)^x} \geqslant 0$.
Ainsi :

$$\boxed{|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x(n-k)^x}.}$$

On a pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $0 < k(n-k) \leqslant (n-1)^2$ donc comme $x > 0$, par décroissance de la fonction $t \mapsto t^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$\frac{1}{k^x(n-k)^x} \geqslant \frac{1}{(n-1)^{2x}}.$$

Par somme, on en déduit :

$$|c_n(x)| \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-1)^{2x}} = (n-1)\frac{1}{(n-1)^{2x}} \text{ donc } \boxed{|c_n(x)| \geqslant \frac{1}{(n-1)^{2x-1}}}$$

Si $x = \frac{1}{2}$ alors on a $|c_n(\frac{1}{2})| \geqslant 1$.
La suite $(|c_n(\frac{1}{2})|)_{n\geqslant 2}$ ne peut donc pas tendre vers 0 (sinon on aboutirait à une absurdité par passage à la limite dans l'inégalité $0 \geqslant 1$).
Si $x < \frac{1}{2}$ alors comme $2x-1 < 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n-1)^{2x-1}} = +\infty$ donc par inégalité, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |c_n(x)| = +\infty$.
Ainsi, dans les deux cas, $\boxed{\text{la suite } (|c_n(x)|)_{n\geqslant 2} \text{ ne tend pas vers } 0}$ donc la suite $(c_n(x))_{n\geqslant 2}$ non plus d'où :

$$\boxed{\text{pour } 0 < x \leqslant \tfrac{1}{2}, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 2} c_n(x) \text{ diverge grossièrement.}}$$

D.3.(a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)=\frac{1}{n}\frac{n-k+k}{k(n-k)}=\frac{1}{k(n-k)}.$$

On a bien :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!],\ \frac{1}{k(n-k)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right).}$$

On a :

$$c_n(1)=(-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}=\frac{(-1)^n}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right).$$

En effectuant le changement d'indice $\ell = n-k$ dans la seconde somme, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}=\sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{1}{\ell}.$$

Ainsi :

$$\boxed{c_n(1)=\frac{2(-1)^n}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}=2(-1)^n\frac{H_{n-1}}{n}.}$$

D.3.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On a :

$$\frac{H_n}{n+1}-\frac{H_{n-1}}{n}=\frac{nH_n-(n+1)H_{n-1}}{n(n+1)}=\frac{n(H_{n-1}+\frac{1}{n})-(n+1)H_{n-1}}{n(n+1)}=\frac{1-H_{n-1}}{n(n+1)}.$$

Or, si $n=2$ alors $1-H_{n-1}=1-1=0$ et si $n>2$ alors $1-H_{n-1}=-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}\leqslant 0$.
On en déduit :

$$\frac{H_n}{n+1}-\frac{H_{n-1}}{n}\leqslant 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

D.3.(c) La série $\sum_{n\geqslant 2} c_n(1)$ est alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\frac{2H_{n-1}}{n}\geqslant 0$.
De plus, la suite $\left(\frac{2H_{n-1}}{n}\right)_{n\geqslant 2}$ est décroissante d'après la question précédente.
D'après le développement asymptotique admis en préambule, on a :

$$H_n=\ln n+o(\ln n) \text{ donc } H_n \sim \ln n$$

Par suite, $\frac{2H_{n-1}}{n}\sim\frac{2\ln(n-1)}{n}\sim\frac{2\ln(n-1)}{n-1}$.
Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2\ln(n-1)}{n-1}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2H_{n-1}}{n}=0$.
Par le critère spécial des séries alternées, on en déduit :

$$\boxed{\text{pour } x=1, \text{ la série } \sum_{n\geqslant 2} c_n(x) \text{ converge.}}$$

E.1. Soit $x > 0$.
On a vu que la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est alternée et la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et tend vers 0.
Par le critère de Leibniz, on en déduit l'inégalité suivante :

$$\boxed{\left|\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^1}{2^x}\right| = \frac{1}{2^x}.}$$

Or, on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} - 1$ d'où $|F(x) - 1| \leqslant \dfrac{1}{2^x}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln 2} = 0$, on en déduit par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.}$$

E.2. Soit $x > 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, en remarquant la nullité des termes d'indices pairs, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} - \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{p=1}^{N} \frac{-2}{(2p)^x} = -2^{1-x} \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^x}.$$

Comme $x > 1$, les séries $\sum \dfrac{1}{n^x}$ et $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{x}$ convergent donc par passage à la limite lorsque $N \to +\infty$ et par propriété des suites extraites, on obtient :

$$\boxed{F(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\zeta(x) \text{ et on en déduit } F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).}$$

E.3. On a pour tout $x > 1$, $2^{1-x} \neq 1$ donc $\zeta(x) = \dfrac{F(x)}{1 - 2^{1-x}}$.
Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} e^{(1-x)\ln 2} = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1.}$$

F.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, 2]$.
Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (car $x > 0$), on a :

$$\forall t \in [n, n+1],\ \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}.$$

Par croissance de l'intégrale (on a bien $n \geqslant n+1$), on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)^x} = \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\mathrm{d}t = \frac{1}{n^x}$$

En retranchant $\dfrac{1}{n^x}$, on obtient :

$$\frac{1}{(n+1)^x} - \frac{1}{n^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} - \frac{1}{n^x} \leqslant 0.$$

D'où en multipliant par -1 :

$$\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N}^*, \text{ pour } x \in [1, 2],\ 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.}$$

F.2. Soit $x \in [1,2]$.

- ⋆ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.
- ⋆ On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x) \geqslant 0$.
- ⋆ La série télescopique $\sum \left(\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge car la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geqslant 1}$ converge (elle tend vers 0 puisque $x > 0$).

Par comparaison, on en déduit :

$$\boxed{\text{pour } x \in [1,2], \text{ la série } \sum_{n\geqslant 1} v_n(x) \text{ converge.}}$$

F.3. On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(1) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = H_N - \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

par la relation de Chasles.
Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(1) = H_N - [\ln|t|]_1^{N+1} = H_N - \ln(N+1) = \ln(N) + \gamma + \underset{N\to+\infty}{o}(1) - \ln(N+1)$$

en utilisant le développement asymptotique donné en préambule.
On a donc :

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(1) = -\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) + \gamma + \underset{N\to+\infty}{o}(1)$$

d'où $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} v_n(1) = \gamma$.
Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \gamma.}$$

F.4. Soit $x \in]1,2]$. On a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$$

par la relation de Chasles.
Ainsi, comme $x \neq 1$:

$$\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \left[\frac{1}{-x+1} t^{-x+1}\right]_1^{N+1} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(N+1)^{x-1}} - 1\right).$$

Comme $x > 1$, on en déduit $\lim\limits_{N\to+\infty} \displaystyle\int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = -\frac{1}{1-x}$ et par définition, $\lim\limits_{N\to+\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = \zeta(x)$.
Ainsi, $\lim\limits_{N\to+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \dfrac{1}{1-x}$.
D'où :

$$\boxed{\text{pour } x \in]1,2], \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}.}$$

F.5. D'après la question F.2., la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge simplement sur $[1,2]$.
On note pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,2]$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [1,2]$.
En sommant l'inégalité obtenue en F.1. (les séries en jeu convergent), on obtient par télescopage :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x} \right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\frac{1}{n+1}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x)|, x \in [1,2]\}$, on en déduit que :

$$0 \leqslant \|R_n\|_\infty^{[1,2]} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{[1,2]} = 0$.
Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.
Montrons maintenant la continuité des fonctions v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $x \in]1,2]$, $v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right)$ et $v_n(1) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.
La fonction v_n est clairement continue sur $]1,2]$. Étudions la continuité en 1.
On a bien $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{n^x} = \lim\limits_{x\to 1} e^{-x\ln n} = e^{-\ln n} = \frac{1}{n}$.
Posons $h = x - 1$. On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right) &= \frac{1}{h}\left(e^{-h\ln n} - e^{-h\ln(n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{h}\Big((1 - h\ln n + \underset{h\to 0}{o}(h)) - (1 - h\ln(n+1) + \underset{h\to 0}{o}(h) \Big) = \ln(n+1) - \ln n + \underset{h\to 0}{o}(1)\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right) = \ln(n+1) - \ln n$. Ainsi, la fonction v_n est continue en 1.
On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$ qui converge uniformément sur $[1,2]$ donc sa somme est continue sur $[1,2]$ et donc en particulier en 1.
Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1).}$$

F.6. On a d'après les deux questions précédentes :

$$\lim_{x\to 1^+} \left(\zeta(x) + \frac{1}{1-x} \right) = \lim_{x\to 1^+} \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) = \gamma$$

donc pour x au voisinage de 1^+, on a :

$$\zeta(x) + \frac{1}{1-x} = \gamma + o(1).$$

D'où :

$$\boxed{\text{pour } x \text{ au voisinage de } 1^+,\ \zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).}$$