DEVOIR MAISON 3 - *Compléments d'algèbre linéaire*

À rendre le jeudi 17 octobre

Exercice 1

Soit n un entier strictement positif. Soit A une matrice carrée d'ordre n à cœfficients complexes qui vérifie :

$$A^n = 0_n \text{ et } A^{n-1} \neq 0_n.$$

1. (a) Montrer qu'il existe $u_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A^{n-1}u_0 \neq 0_{n,1}$.

   (b) Montrer que la famille $\mathscr{B} = \left(u_0, Au_0, \ldots, A^{n-1}u_0\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
   En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

   (c) On note φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ défini par : $\forall u \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\varphi(u) = Au$.
   Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

   (d) On note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrivant $J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'il existe une matrice P inversible d'ordre n telle que $A = PJP^{-1}$.

2. Déterminer, en justifiant, la trace et le déterminant de A puis la trace et le déterminant de la matrice-blocs $\begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$.

3. (a) Déterminer une matrice D diagonale d'ordre n telle que $DJ - JD = J$.

   (b) Déterminer, à l'aide de D et P, une matrice H carrée d'ordre n telle que $HA - AH = A$.

   (c) Calculer le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

   (d) En déduire que les matrices $\begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ sont semblables.

4. On souhaite montrer dans cette question que les seuls endomorphismes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui commutent avec φ sont les polynômes en φ.

   (a) Soit $\psi \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right)$ tel que $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$.
   Justifier qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\psi(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k(u_0)$.
   Dans la suite, on note P le polynôme défini par $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.

   (b) Montrer que pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, on a $\psi(A^\ell u_0) = [P(\varphi)](A^\ell u_0)$.
   En déduire que $\psi = P(\varphi)$.

   (c) Conclure.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2.
Soit u un endomorphisme de E de rang 1.
On note $\mathrm{tr}(u)$ la trace de l'endomorphisme u.

1. Montrer qu'on a $\dim\big(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)\big) \in \{0, 1\}$.
2. En déduire qu'on a $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$ ou $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
3. On suppose dans cette question seulement qu'on a $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$.
   (a) Rappeler la définition d'un sous-espace stable par u et à l'aide de cette seule définition, prouver que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par u.
   (b) Justifier qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.
   (c) En déduire qu'on a $\mathrm{tr}(u) \neq 0$.
4. On suppose dans cette question seulement qu'on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.
   (a) Soit e un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.
   Justifier l'existence d'une base de E dont le premier vecteur est e.
   (b) À l'aide de la matrice de u dans cette base, montrer qu'on a $\mathrm{tr}(u) = 0$.
5. En déduire l'équivalence :

$$E = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) \iff \mathrm{tr}(u) \neq 0.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, deux à deux distincts.

On note $V(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ le déterminant de Vandermonde de $x_1, \ldots, x_n$.

On souhaite prouver par une autre démonstration que celle vue en cours que $V(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.

On considère les trois bases de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ suivantes :

- $\mathscr{B} = \big(1, \ldots, X^{n-1}\big)$ la base canonique,
- $\mathscr{B}' = \big(L_1, \ldots, L_n\big)$ la base des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $x_1, \ldots, x_n$,
- $\mathscr{B}'' = \big(1, X - x_1, (X - x_1)(X - x_2), \ldots, (X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_{n-1})\big)$.

1. Prouver que la famille $\mathscr{B}''$ est bien une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. Calculer le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$, le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}''$ et le déterminant de la matrice de passage de $\mathscr{B}''$ à $\mathscr{B}$.
3. Conclure.