ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Cours (Première partie)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Norme

A. Définition d'une norme

Définition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle *norme sur E* toute application $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall u \in E,\ \|u\| \geqslant 0$
- *Séparation :* $\forall u \in E,\ [\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_E]$
- *Homogénéité :* $\forall u \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$
- *Inégalité triangulaire :* $\forall (u,v) \in E^2,\ \|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Pour $u \in E$, on dit que $\|u\|$ est *la norme de u.*
Le couple $(E, \|.\|)$ est appelé *espace vectoriel normé.*

Exemple : La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$ et le module est une norme sur $\mathbb{C}$.
Ainsi, $(\mathbb{K}, |.|)$ est un espace vectoriel normé.

Notons les conséquences suivantes :

- On a $\|0_E\| = 0$.
- Pour tout $u \in E$, on a $\|-u\| = \|u\|$.
- Un vecteur est dit *unitaire* ou *normé* lorsque sa norme est égale à 1.
  Si $u \in E$ avec $u \neq 0_E$ alors $\dfrac{u}{\|u\|}$ est un vecteur unitaire.
- *Généralisation de l'inégalité triangulaire :*
  On a pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$, $\left\| \sum_{i=1}^{n} u_i \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|$.

Proposition 2 (*Seconde inégalité triangulaire*)

On a pour tout $(u,v) \in E^2$:

$$\big| \|u\| - \|v\| \big| \leqslant \|u - v\|.$$

B. Exemples fondamentaux

Proposition 3 (*Norme euclidienne*)

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
Pour tout $u \in E$, on pose $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
On définit ainsi une norme appelée *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Exemples :

- $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) muni du produit scalaire canonique :

$$\forall (U, V) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ \langle U, V \rangle = U^\top V = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{ en notant } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

  La norme euclidienne associée est définie par :

$$\forall U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|U\| = \sqrt{U^\top U} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \text{ en notant } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

- $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ (pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b$) muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in \left(\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})\right)^2,\ \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \,\mathrm{d}t.$$

  La norme euclidienne associée est définie par :

$$\forall f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R}),\ \|f\| = \sqrt{\int_a^b \left(f(t)\right)^2 \mathrm{d}t}.$$

Proposition 4 (*Normes sur* $\mathbb{K}^n$)

- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$.
  On définit ainsi une norme appelée *la norme 1*.
- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2}$.
  On définit ainsi une norme appelée *la norme 2*.
  Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.
- Pour tout $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose $\|u\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |u_i|$.
  On définit ainsi une norme appelée *la norme infinie*.

Proposition 5 (*Norme infinie sur* $\mathscr{B}(I, \mathbb{K})$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide.
On note $\mathscr{B}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $f \in \mathscr{B}(I, \mathbb{K})$, on pose $\|f\|_\infty^I = \operatorname*{Sup}\limits_{t \in I} |f(t)|$.
On définit ainsi une norme appelée *la norme infinie* ou *la norme de la convergence uniforme*.

Utile : Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et k est un réel positif alors $\operatorname{Sup}(kA) = k\operatorname{Sup}(A)$.

C. Distance associée à une norme

Définition 6

On appelle *distance sur E* toute application d de E^2 dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- ⋆ $\forall (u,v) \in E^2,\ d(u,v) \geqslant 0$
- ⋆ *Séparation :* $\forall (u,v) \in E^2,\ [d(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v]$
- ⋆ *Symétrie :* $\forall (u,v) \in E^2,\ d(u,v) = d(v,u)$
- ⋆ *Inégalité triangulaire :* $\forall (u,v,w) \in E^3,\ d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$.

Proposition 7

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

L'application $d : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \|v-u\| \end{array}$ est une distance sur E.

On dit que d est *la distance associée à la norme* $\|.\|$.

D. Normes équivalentes

Définition 8

Deux normes N_1 et N_2 définies sur E sont dites *équivalentes* lorsqu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que :

$$\forall u \in E,\ \alpha N_2(u) \leqslant N_1(u) \leqslant \beta N_2(u).$$

- On notera que cette notion est indépendante de l'ordre des normes.
- Si les normes N_1 et N_2 sont équivalentes et les normes N_2 et N_3 sont équivalentes alors les normes N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exemple 1 : Montrer que les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Exemple 2 : On note $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\text{Sup}}\ |f(t)|$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leqslant \alpha \|f\|_\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto t^n$.
   En utilisant la suite de fonctions (f_n), montrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

> Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite (u_n) de vecteurs non nuls de E telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = 0$ ou $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{N_1(u_n)}{N_2(u_n)} = +\infty$.

Théorème 9

Si E est un espace vectoriel de dimension finie alors toutes les normes définies sur E sont équivalentes.

Ce n'est pas le cas lorsque l'espace vectoriel n'est pas de dimension finie (*cf exemple 2*).

II. Suites vectorielles

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
On s'intéresse dans ce paragraphe aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \|.\|)$ c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un vecteur de E.

A. Suites bornées

Définition 10

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée pour la norme* $\|.\|$ lorsqu'il existe $r \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n\| \leqslant r$.

On notera que la notion de suite bornée dépend de la norme.
Cependant, si deux normes sont équivalentes alors toute suite bornée pour l'une est bornée pour l'autre.
Ainsi, lorsque E est de dimension finie, la notion de suite bornée ne dépend pas de la norme utilisée.

B. Suites convergentes/divergentes

1. Définition

Définition 11

- Soit $\ell \in E$. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *pour la norme* $\|.\|$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant n_0,\ \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

  On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, on dit qu'elle *diverge*.

- Dans $(\mathbb{K}, |.|)$, on retrouve les notions connues.
- On notera que ces notions dépendent de la norme.
  Cependant, si deux normes sont équivalentes alors toute suite convergente pour l'une est convergente l'autre, avec la même limite.
- *Illustration graphique dans* $\mathbb{R}^2$ *muni de la norme* $\|.\|_2$.

Proposition 12

On a l'équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\|u_n - \ell\|}_{\text{suite réelle}} = 0$$

Exemple 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par : $\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = t^{1/n}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la fonction constante égale à 1 dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle vers la fonction constante égale à 1 dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$?

Exemple 4 : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$.

2. Propriétés

Proposition 13

- Lorsqu'elle existe, la limite est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, converge vers ℓ.

Proposition 14 (*Opérations sur les limites*)

- Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E convergent respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell_1 + \ell_2$.
  On en déduit que l'ensemble des suites convergentes de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers ℓ et la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge vers λ alors la suite $(\lambda_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda\ell$.

3. Cas de la dimension finie

Lorsque E est de dimension finie, la notion de suite convergente et la valeur de sa limite le cas échéant ne dépendent pas de la norme utilisée.

Proposition 15 (*Suites de coordonnées*)

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_{n,1}, \dots, u_{n,p}$ les coordonnées de u_n dans la base $\mathscr{B}$.
Soit $\ell \in E$. On note $\ell_1, \dots, \ell_p$ les coordonnées de ℓ dans la base $\mathscr{B}$.
On a l'équivalence :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ \lim_{n\to+\infty} u_{n,k} = \ell_k.$$

En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E si et seulement si toutes ses suites de coordonnées convergent dans $\mathbb{K}$.
On a dans ce cas : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sum\limits_{k=1}^{p}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,k}\right)e_k$.

Exemple 5 :

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(n\sin(1/n), \left(1+1/n\right)^n\right).$$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Étudier la convergence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{R}_N[X]$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{n}X^k.$$

3. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{n} \\ 2+\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & 2 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -1 \end{pmatrix}$.

   (b) Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ convergeant respectivement vers A et B alors la suite $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers AB.