Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Normes

I. A Normes et espaces vectoriels normés

Définition 1.1

On appelle **norme** sur E une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

positivité : $\forall x \in E, N(x) \geqslant 0$;

séparation : $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

homogénéité : $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;

inégalité triangulaire : $\forall x, y \in \mathrm{E}, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Remarques 1.2 :
- Si N est une norme sur E, alors $N(0_E) = 0$ (conséquence de l'homogénéité).
- La positivité peut se déduire de l'homogénéité et de l'inégalité triangulaire.

Attention : Lorsque l'on veut montrer qu'une fonction définit une norme sur E, ne pas oublier de montrer qu'elle est bien définie sur E.

Notation : Si E est un espace vectoriel normé et $x \in E$, on notera $\|x\|$ la norme de x plutôt que $N(x)$.

Exemples 1.3 :
- L'application valeur absolue $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.
- L'application module est une norme sur $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
- Dans $\mathbb{R}^2$:

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \quad \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \text{ et } \|(x,y)\|_\infty = \max\big(|x|, |y|\big)$$

définissent des normes.

Vocabulaire : Un vecteur x d'un espace vectoriel normé est dit **unitaire** lorsque qa norme est égale à 1.

Proposition 1.4 (seconde inégalité triangulaire)

Soit E un espace vectoriel normé :

$$\forall (x,y) \in E^2, \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\|.$$

I. B Normes usuelles

Proposition 1.5

Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $x \mapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme appelée **norme euclidienne**.

Proposition 1.6

Sur $\mathbb{K}^n$, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1\,;n]\!]} |x_i|$$

définissent des normes.

Proposition 1.7

Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'espace des fonctions bornées sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $N : f \mapsto \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$.

Exemple 1.8 : Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$ peut être muni de la norme $N : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Proposition 1.9

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \|f\|_\infty = \max_{x \in [a\,;b]} |f(x)|$$

définissent des normes sur $\mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{K})$.

Vocabulaire : Sur l'espace $\mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{K})$:
- $\|\ \|_\infty$ est appelée norme de la convergence uniforme ;
- $\|\ \|_1$ est appelée norme de la convergence en moyenne ;
- $\|\ \|_2$ est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Remarque 1.10 : Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E, alors $(F, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé.
Par exemple $(\mathcal{C}^1([0\,;1], \mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé.

Définition/Proposition 1.11 (EVN produit)

Soit $(E_1, \dots, E_n)$ une famille de $n \in \mathbb{N}^*$ espaces vectoriels normés munis de normes : $(N_1, \dots, N_n)$, alors l'application N définie sur $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \quad N(x) = \max_{i \in [\![1\,;n]\!]} N_i(x_i)$$

est une norme sur E appelée **norme produit sur $\boldsymbol{E}$**. On dit alors que (E, N) est un **espace vectoriel normé produit**.

I. C Distance associée à une norme

Définition 1.12

Soit E un espace vectoriel normé, on appelle **distance** associée à la norme $\|.\|$ de E l'application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|\,.$$

Proposition 1.13

Soit E un espace vectoriel normé, la distance associée vérifie :

positivité : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) \geqslant 0\,;$

séparation : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y\,;$

symétrie : $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)\,;$

inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 1.14

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie non vide de E et $x \in E$.
On appelle **distance de $\boldsymbol{x}$ à $\boldsymbol{A}$** :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

I. D Boules

Définition 1.15

Soit E un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

- boule ouverte de centre a et de rayon r :

$$B_o(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}\,;$$

- boule fermée de centre a et de rayon r :

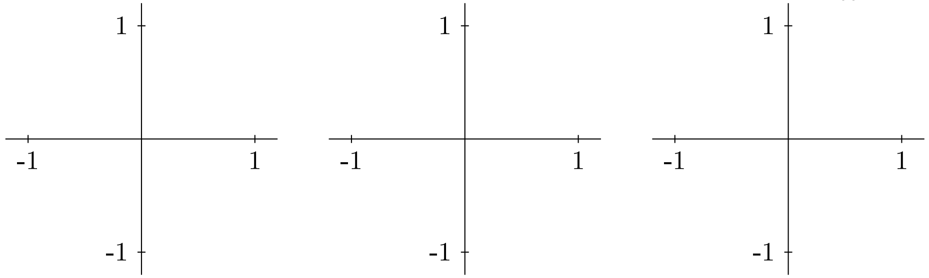
$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leqslant r\}\,;$$

- sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}\,;$$

Exemples 1.16 : Sphère unité dans $\mathbb{R}^2$ pour chacune des normes usuelles :

Norme $\| \ \|_2$ Norme $\| \ \|_1$ Norme $\| \ \|_\infty$



Définition 1.17

Une partie A de E est dite **convexe** lorsque :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0\,;1], (1 - t)x + ty \in A.$$

Remarque 1.18 : Pour $x, y \in E$, l'ensemble $\{(1 - t)x + ty;$ avec $t \in [0\,;1]\}$ est le segment $[x\,;y]$. Une partie A de E est donc convexe si et seulement si pour tout $x, y \in A$, le segment $[x\,;y]$ est inclus dans A.

Exemples 1.19 :

- Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont
- Dans le plan, un disque est convexe, un cercle n'est pas convexe.
- Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

Proposition 1.20

Dans un espace vectoriel normé, toute boule, ouverte ou fermée, est convexe.

I. E Parties bornées

Définition 1.21

Soit E un espace vectoriel normé,

- une partie A de E est dite **bornée** lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in A, \|x\| \leqslant M.$$

- une application $f : X \longrightarrow E$ est dite **bornée** lorsque :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in X, \|f(x)\| \leqslant M$$

Remarques 1.22 :
- Les boules sont bornées.
- Une application $f : X \longrightarrow E$ est bornée si et seulement si la partie $f(X)$ est bornée.

Attention : Le caractère borné dépend de la norme utilisée.

Exemple 1.23 : On considère dans $\mathbb{K}[X]$ les normes définies pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ par :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ et } \|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \,.$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $A = \{P_n ;\ \text{avec } n \in \mathbb{N}\}$. Alors A est bornée pour la norme $\| \ \|_\infty$ et non bornée pour la norme $\| \ \|_1$.

II Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Définition 2.1

Soit E un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $\ell \in E$.
On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers ℓ (ou tend vers ℓ) lorsque :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

Vocabulaire : Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite convergente lorsqu'il existe $\ell \in E$ tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ; sinon elle est dite divergente.

Proposition 2.2 (unicité de la limite)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est unique.

Vocabulaire : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on dit que ℓ est la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention : La notion de limite dépend de la norme choisie !

Exemple 2.3 : Soit $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : t \mapsto t^n$. Alors dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_1)$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $0_{\mathcal{F}}$, mais pas dans $(E, \| \ \|_\infty)$.

Proposition 2.4

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et $\ell \in E$, alors :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow \|x_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 2.5

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est bornée.

Proposition 2.6 (opérations algébriques)

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments d'un espace vectoriel normé E convergentes vers ℓ et ℓ', $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite scalaire convergente vers α.
Alors les suites $(x_n + y_n)_{n+y_n\in\mathbb{N}}, (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\ell + \ell', \lambda\ell$ et $\alpha\ell$.

Corollaire 2.7

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Attention : on ne peut rien conclure si les deux suites divergent.

II. A Suites d'éléments d'un espace produit fini

Théorème 2.8

Soit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ un espace vectoriel normé produit, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E avec : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,p})$ et $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_p) \in E$. Alors :

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\| \ \|_E} \ell \Leftrightarrow \forall i \in [\![1\,;p]\!], x_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{\| \ \|_{E_i}} \ell_i.$$

II. B Suites extraites

Définition 2.9

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E. On appelle **suite extraite** de x toute suite de la forme : $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque 2.10 : Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n.$$

(démo par récurrence).

Proposition 2.11

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et $\ell \in$ E.

- Si x converge vers ℓ, alors toute suite extraite de x converge vers ℓ.
- Si x a deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes, alors x diverge.
- Si les suites extraites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors x converge vers ℓ.

Définition 2.12

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E et $a \in E$. On dit que a est une **valeur d'adhérence** de la suite x lorsqu'il existe une suite extraite de x qui converge vers a.

Exemple 2.13 : Déterminer les valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.14

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérences diverge.

Exemple 2.15 : La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Théorème 2.16 (Bolzano-Weierstrass)

Toute suite réelle bornée a au moins une valeur d'adhérence.

III Normes équivalentes

Définition 3.1

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites **équivalentes** lorsqu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que :

$$\forall x \in E, \begin{cases} N_1(x) \leqslant \alpha N_2(x) \\ N_2(x) \leqslant \beta N_1(x). \end{cases}$$

Exemple 3.2 : Équivalence des normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$.

Remarques 3.3 :

- L'équivalence de normes N_1 et N_2 signifie que la boule centrée en 0 et de rayon 1 pour N_1 est incluse dans la boule de rayon ___ pour N_2 et contient la boule de rayon ___ pour N_2.
- Nous verrons que sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Proposition 3.4

Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E et $\ell \in E$. Alors :

- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme N_1 si et seulement si elle est bornée pour la norme N_2.
- La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour la norme N_1 si et seulement si elle converge vers ℓ pour la norme N_2.

Méthode 3.5

Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalents sur E, on peut :

- Trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui est bornée pour une norme et non bornée pour l'autre.
- Trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge pour une norme et pas pour l'autre.

Exemples 3.6 : Suite des exemples 1.23 et 2.3.

IV Topologie

IV. A Parties ouvertes

Définition 4.1

Soit E un espace vectoriel normé, $x \in E$ et V une partie de E. On dit que V est un **voisinage** de x lorsque V contient une boule ouverte centrée en x, c'est à dire :

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall y \in E, \|x-y\| < r \Rightarrow y \in V.$$

Exemples 4.2 :
- Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $[1\,;+\infty[$ est un voisinage de 2, de 7, mais pas de 1, ni de 0.
- Dans $(E, \|.\|)$, pour tout $r > 0$, $B_o(x,r)$ est un voisnage de x.

Définition 4.3

Soit E un espace vectoriel normé et U une partie de E. On dit que U est un **ouvert** de E lorsque U est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire :

$$\forall x \in U, \exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall y \in E, \|x-y\| < r \Rightarrow y \in U.$$

Exemples 4.4 :
- L'ensemble vide est un ouvert.
- Toute boule ouverte est un ouvert.
- Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ouverts.
- Dans $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$, le demi-plan : $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ est ouvert.

Théorème 4.5

- Une réunion quelconque (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection finie d'ouverts et un ouvert.

Exemple et contre-exemple : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n}\,;1\right[=]0\,;1[$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}\,;\frac{1}{n}\right[= \{0\}$.

Proposition 4.6

Un produit fini d'ouverts est un ouvert.

IV. B Parties fermées

Définition 4.7

Soit E un espace vectoriel normé et F une partie de E. On dit que F est fermé lorsque son complémentaire $E \setminus F$ est ouvert.

Exemples 4.8 :
- Toute boule fermée, toute sphère est fermée.
- Tout singleton $\{x\}$ est fermé.
- Dans $\mathbb{R}$, les ensembles $[a\,;b]$, $]-\infty\,;b]$, $[a\,;+\infty[$ sont fermés.

Attention : Un ensemble n'est pas soit ouvert soit fermé.

Contre exemple 4.9 : Dans un espace vectoriel normé E, l'ensemble vide et E sont à la fois ouverts et fermés.
Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $[0\,;1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Théorème 4.10

- Toute intersection quelconque de fermés est fermée.
- Toute réunion finie de fermés est fermée.

Proposition 4.11

Un produit fini de fermés est un fermé.

IV. C Intérieur, adhérence, frontière

Définition 4.12

- Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On dit qu'un point x de E est **intérieur** à A lorsque A est un voisinage de x, c'est à dire :

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall y \in E, \|x-y\| < r \Rightarrow y \in A.$$

- On appelle **intérieur** de A, et on note $\mathring{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.

Exemple 4.13 : $\mathring{B}_f(x,r) = B_o(x,r)$.

Proposition 4.14

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. L'intérieur de A est le plus grand ouvert de E inclus dans A.

Proposition 4.15

Une partie A d'un espace vectoriel normé est ouverte si et seulement si $A = \mathring{A}$.

Définition 4.16

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E et $x \in E$.
- On dit que x est **adhérent** à A lorsque toute boule ouverte de centre x rencontre A, c'est à dire :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, B_o(x,r) \cap A \neq \varnothing.$$

- On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.

Remarque 4.17 : Un point est adhérent à A si et seulement si :
$$\forall r > 0, \exists a \in A \mid \|x - a\| < r.$$

Exemples 4.18 :
$$\overline{B_o(x,r)} = \underline{\qquad\qquad}, \overline{B_f(x,r)} = \underline{\qquad\qquad}, \overline{]0\,;1[} = \underline{\qquad}.$$

Proposition 4.19

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé, alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.

Proposition 4.20

Une partie A d'un espace vectoriel normé est fermée si et seulement si $A = \overline{A}$.

Définition 4.21

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On appelle **frontière** de A l'ensemble $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Remarque 4.22 : La frontière d'une partie A est un fermé.

IV. D Caractérisations séquentielles

Théorème 4.23 (caractérisation séquentielle des points adhérents)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E.
Un point $x \in E$ est adhérent à A si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

Théorème 4.24 (caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie A d'un espace vectoriel normé est fermée si et seulement si la limite de toute suite convergente (dans E) d'éléments de A est aussi dans A.

Exemple 4.25 : Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors le graphe de f : $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x));\ \text{avec } x \in [a\,;b]\}$ est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$.

Définition 4.26

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé. Une partie D de A est dite **dense** dans A lorsque $A \subset \overline{D}$.

Remarque 4.27 : D est dense dans A si et seulement si pour tout $x \in A$, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers x.

Exemples 4.28 :
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des fonctions en escalier de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}_m([a\,;b], \mathbb{R})$ pour la norme de la convergence uniforme $\|\ \|_\infty$.

IV. E Topologie et normes équivalentes

Théorème 4.29

Soit E un espace vectoriel, N_1, N_2 deux normes équivalentes sur E et A une partie de E. Alors :
- A est ouvert pour N_1 si et seulement si A est ouvert pour N_2 ;
- A est fermé pour N_1 si et seulement si A est fermé pour N_2 ;
- l'intérieur de A pour N_1 et pour N_2 sont identiques ;
- l'adhérence de A pour N_1 et pour N_2 sont identiques ;
- la frontière de A pour N_1 et pour N_2 sont identiques.

IV. F Topologie relative

Définition 4.30

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E et $a \in A$. On appelle **voisinage de a relatif à A** toute intersection d'un voisinage de a dans E et de A.

Exemple 4.31 : $[0\,;1]$ est un voisinage de 0 relativement à $[0\,;+\infty[$.

Définition 4.32

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E.
Une partie U de A est un **ouvert relatif de A** lorsque U est un voisinage relatif de A de chacun de ses points.
Une partie F de A est un **fermé relatif de A** lorsque son complémentaire dans A est un ouvert relatif de A.

Exemple 4.33 : $[0\,;1[$ est un ouvert relatif de $[0\,;+\infty[$ et $]0\,;1]$ est un fermé relatif de $]0\,;+\infty[$.

Proposition 4.34

Soit E un espace vectoriel normé, A une partie de E.
- Une partie U de A est un ouvert relatif de A si et seulement si c'est l'intersection de A et d'un ouvert de E.
- Une partie F de A est un fermé relatif de A si et seulement si c'est l'intersection de A et d'un fermé de E.
- Une partie F de A est un fermé relatif de A si et seulement si la limite de toute suite d'éléments de F qui converge dans A est dans F.