# Exerices

**Exercice 1.** Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer.
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que $n$ a vue sur la mer lorsque :

$$\forall p \geqslant n : u_p \leqslant u_n$$

On note $A$ l'ensembles des entiers qui ont vue sur la mer.

1. On suppose dans cette question que $A$ est infini.
   Montrer qu'il existe une suite extraite de $u$ qui est décroissante.
2. On suppose à présent que l'ensemble $A$ est fini.
   Montrer qu'il existe une suite extraite de $u$ qui est croissante.
3. Conclure.

**Exercice 2.** Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que toute sphère $S(a, r)$ est génératrice de $E$.

**Exercice 3.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_\infty$.
Montrer que le carré $]0\,;1[\times]0\,;1[$ de $\mathbb{R}^2$ est ouvert.
Même question avec la norme $\|.\|_1$.

**Exercice 4.** Soit $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ bornées et

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum u_n \text{ converge absolument}\right\}.$$

1. Montrer que $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ définit une norme sur $\ell^1(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$ et comparer les normes $N_1$ et $N_\infty$ sur $\ell^1(\mathbb{K})$. Ces normes sont-elles équivalentes ?

**Exercice 5.** Soit $U$ un ouvert et $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$.
Montrer que $A + U$ est ouvert.

**Exercice 6.** Soit $A$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit $x = \sup(A)$.
Montrer que $x$ est adhérent à $A$.

**Exercice 7.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$ qui converge vers $\ell \in E$.
Montrer que $\{x_n;\ \text{avec } n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est un fermé.

**Exercice 8.** Soit $A$ et $B$ des parties d'un espace vectoriel normé $E$.

1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. Comparer $\overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$, $\mathring{A}\cap\mathring{B}$ et $\overbrace{A \cap B}^{\circ}$ et enfin $\mathring{A}\cup\mathring{B}$ et $\overbrace{A \cup B}^{\circ}$.
3. Montrer que $\mathring{A} = A \setminus fr(A)$ et $\overline{A} = A \cup fr(A)$.

**Exercice 9.** Soit $A$ une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.
Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

**Exercice 10.**

1. Soit $E$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que, si $\mathring{F} \neq \varnothing$, alors $F = E$.
2. On note $E$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, $E_1$ (resp. $P$) la partie de $E$ formée des applications de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. polynomiales). Montrer que : $\mathring{E}_1 = \mathring{P} = \varnothing$.

# Banque CCINP

**Exercice 11 (CCINP 34).** Soit $A$ une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $E$.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à $A$, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si $A$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
4. Démontrer que si $A$ est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

**Exercice 12 (CCINP 45).**
**Les questions 1. et 2. sont indépendantes**.
Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit $A$ une partie non vide de $E$.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de $A$.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si $A$ est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que $A$ est fermée et que :
   $$\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y).$$
   Prouver que $A$ est convexe.