Devoir Surveillé n° 2.
le 4 octobre.

Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Q1. Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et déterminer une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Q2. Application : On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -4u_n + 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -6u_n + 4v_n - 6w_n \\ w_{n+1} = -u_n + v_n - 3w_n \end{cases} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $Y_n = P^{-1}X_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer Y_n en fonction de $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ et n.

À quelle condition sur (u_0, v_0, w_0) les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent-elles simultanément ?

Expliciter alors ces suites.

Exercice 2

Pour n entier, $n \geqslant 2$, on définit le déterminant de Vandermonde de n nombres complexes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ par :

$$V(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

L'objet de cet exercice est de démontrer par récurrence que l'on a :

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i).$$

Q3. Calculer $V(x_1, x_2)$. Expliquer pourquoi il suffit de faire la démonstration pour n nombres complexes $x_1, x_2 \ldots, x_n$ deux à deux distincts.

Dans la suite, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q4. On considère la fonction $t \mapsto P(t) = V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$.

Démontrer que P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ et justifier que le coefficient de t^{n-1} est un déterminant de Vandermonde.

Démontrer par récurrence que $V(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.

Q5. Première application
Calculer le déterminant de la matrice $A = (i^j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ en faisant apparaître le déterminant de Vandermonde $V(1, 2, \ldots, n)$.

Q6. Deuxième application
Donner un exemple de n nombres complexes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, tels que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$.
Soit n nombre complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ deux à deux distincts et tous non nuls, démontrer que l'une au moins des sommes $\sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \sum_{k=1}^{n} x_k^3 \quad \cdots \sum_{k=1}^{n} x_k^n$ est non nulle.
On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde non nul.

Problème : Théorème de décomposition de Dunford

Notations :
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne, pour n entier naturel, $n \geqslant 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :

(1) $A = D + N$;

(2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale);

(3) N est nilpotente;

(4) $DN = ND$.

De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q 7. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$?

Q 8. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q 9. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q 10. (question supprimée)

Q 11. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.
Démontrer que le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par :
$D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q 12. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$.

Q 13. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{e_1\},\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\{e_2\},\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$.
Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q 14. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q 15. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \text{ avec } \deg(U) < 2 \text{ et } \deg(V) < 1.$$

Q 16. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.
Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.
Démontrer que p est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$ et q est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.

Q 17. On pose $d = p + 2q$. Ecrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q8**).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q 18. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q 19. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q 20. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q 21. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q 22. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - (partie supprimée)