Corrigé du DS 2

Exercice 1 : CCINP 2024 maths 2 exo 1

Q1. On peut commencer par le calcul du polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X+4 & -2 & 2 \\ 6 & X-4 & 6 \\ 1 & -1 & X+3 \end{vmatrix} \\ &\underset{C_3 \leftarrow C_3 + C_2}{\overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=}} \begin{vmatrix} X+2 & -2 & 0 \\ X+2 & X-4 & X+2 \\ 0 & -1 & X+2 \end{vmatrix} \\ &\overset{\text{lin. } C_1, C_3}{=} (X+2)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & X-4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (X+2)^2(X-1)\end{aligned}$$

On constate que le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des valeurs propres de A est $\{-2, 1\}$; la matrice $A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est de rang égal à 1, donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre associé à la valeur propre double -2 est de dimension égale à 2 ; l'autre valeur propre, 1, est simple. On peut donc conclure que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

On calcule pour $\lambda \in \{-2, 1\}$ le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ associé à la valeur propre λ, et on exprime chacun comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre :

$$E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) ; \qquad E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right)$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et ses colonnes forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de la matrice A, donc

$$\boxed{\text{Pour } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ et } P^{-1}AP = D \text{ où } D = \mathrm{diag}(-2, -2, 1).}$$

Q2. D'après la relation de récurrence de l'énoncé, la suite matricielle $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad Y_{n+1} = P^{-1}(AX_n) = (P^{-1}AP)(P^{-1}X_n) = DY_n$$

on montre donc par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \;\; Y_n = D^n Y_0 = \begin{pmatrix} (-2)^n \alpha_0 \\ (-2)^n \beta_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix}}$

On vient d'établir que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc convergente, et que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont géométriques de raison -2, de valeur absolue strictement plus grande que 1, donc ces deux suites convergent si et seulement si $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = PY_n$ donc $u_n = \alpha_n + 2\gamma_n$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une combinaison linéaire des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de même pour les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc si les suites $(alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent ; alors leurs combinaisons linéaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent également. Et réciproquement $(alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont combinaisons linéaires des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les coefficents sont les coefficients de la matrice P^{-1}.

On conclut que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simultanément si et seulement si

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} \;\; Y_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\end{pmatrix} \text{ ou, de manière équivalente, } \quad \exists \gamma \in \mathbb{R} \;\; \begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$$

et dans ce cas la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = (PY_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante aussi :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergent simultanément si et} \\ \text{seulement si elles sont constantes et } \begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}\right) \\ \text{(sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 1).}\end{array}}$$

Exercice 2 : CCINP 2022 maths 2 exo 1

Q3. $V(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.
Si il existe $i \neq j$ et $x_i = x_j$ alors $V(x_1,x_2,\dots,x_n) = 0$, car il a deux colonnes identiques.
Dans la suite, $x_1, x_2 \dots, x_n$ sont n nombres complexes deux à deux distincts.

Q4. Soit $P : t \mapsto V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$.

- Le développement de $V(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ par rapport à la dernière colonne donne

$$P(t) = (-1)^{n+1}\Delta_{1,n} + (-1)^{n+2}\Delta_{2,n}t + (-1)^{n+3}\Delta_{3,n}t^2 + ... + (-1)^{n+n}\Delta_{n,n}t^{n-1}$$

  avec $\Delta_{i,n}$ le déterminant obtenu en éliminant la ligne d'indice i et la colonne d'indice n de $V(x_1,x_2,\dots,x_n)$, les $\Delta_{i,n}$ ne dépendent pas de t. Donc P est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$.
  Le coefficient de t^{n-1} est $\Delta_{n,n} = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$
- On a $P(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, car c'est un déterminant avec deux colonnes identiques, donc le polynôme $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}(X - x_i)$ divise P, si P n'est pas le polynôme nul il est de degré $n-1$, donc $P(X) = C \prod\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}(X - x_i)$, avec $C \in \mathbb{C}$.
  C est le coefficient du plus haut degré de P donc $C = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$.
  Ce qui donne pour $t = x_n$:

$$V(x_1, x_2 \dots, x_n) = V(x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_n - x_i).$$

- Montrons par récurrence que : $V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)$.
  La relation est vraie pour $n = 2$.On la suppose pour n.
  Soit $x_1, x_2 \dots, x_{n+1}$ sont $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts, on a

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2 \dots, x_{n+1}) &= V(x_1,x_2,\dots,x_n) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) . \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n+1}(x_j - x_i) \end{aligned}$$

  Conclusion : par principe de récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2, V(x_1, x_2 \dots, x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i).}$$

Q5. Soit $A = \left(i^j\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$, on a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \dots & n^n \end{vmatrix}.$$

On factorise chaque ligne i, donc

$$\begin{aligned} \det A &= n! \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= n!\ V(1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

car le déterminant d'une matrice est égale au déterminant de sa transposée.
Donc :

$$\boxed{\det A = n!\ V(1, 2, \dots, n).}$$

Q6. On prend $a_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}, k \in [\![1, n]\!]$.
Les nombres complexes $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts et tous non nuls, et

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0.$$

Les nombres complexes $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts, donc $V(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, donc :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C});\ \text{or } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\text{donc } MX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n \end{pmatrix} \neq 0.$$

ainsi

$$\boxed{\text{l'une au moins des sommes } \sum_{k=1}^{n} x_k, \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \cdots \sum_{k=1}^{n} x_k^n \text{ est non nulle.}}$$

Problème : Théorème de décomposition de Dunford : CCINP 2021 maths 2

Partie I - Quelques exemples

Q7. Soit $A \in M_n(K)$.

- $\boxed{\text{Si } A \text{ est diagonalisable, } (D,N)=(A,0)}$ est la décomposition de Dunford de A.
  En effet, $D = A$ est diagonalisable, $N = 0$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = A + 0 = D + N$.
- $\boxed{\text{Si } A \text{ est nilpotente, } (D,N)=(0,A)}$ est la décomposition de Dunford de A.
  En effet, $D = 0$ est diagonalisable, $N = A$ est nilpotente, $DN = ND = 0$ et $A = 0 + A = D + N$.
- Une matrice trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ a un polynôme caractéristique scindé, donc : $\boxed{\text{Une matrice trigonalisable dans } M_n(\mathbb{K}) \text{ vérifie l'hypothèse du théorème}}$ donc admet une décomposition de Dunford.
- Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
  D' est diagonalisable (car diagonale), N' est nilpotente (car $(N')^2 = 0$), $A = D' + N'$, cependant D' et N' ne commutent pas :
  $$D'N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
  $$\boxed{\text{Non, } \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ n'est pas la décomposition de Dunford de } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Q8. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Son polynôme caractéristique $\chi_A(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.
Supposons par l'absurde que A admet une décomposition de Dunford (D, N). D'après le théorème, on a de plus $\chi_A = \chi_D$.
Puisque D est diagonalisable, D est semblable à une matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Son polynôme caractéristique vaut $\chi_A(X) = \chi_D(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.
Donc χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \text{ n'admet pas de décomposition de Dunford dans } M_2(\mathbb{R}).}$$

Q9. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique, en développant par rapport à la deuxième colonne :

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -8 \\ -3 & X+1 & -6 \\ 2 & 0 & X+5 \end{vmatrix} = (X+1)\begin{vmatrix} X-3 & -8 \\ 2 & X+5 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)(X^2+2X+1) = (X+1)^3.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)^3.}$
χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ donc d'après le théorème de l'énoncé, A admet une décomposition de Dunford. Soit (D, N) le couple de sa décomposition de Dunford.
D est diagonalisable et $\chi_D(X) = \chi_A(X) = (X+1)^3$ donc $\mathrm{Sp}(D) = \{-1\}$. D est semblable à la matrice diagonale avec des -1 sur sa diagonale, donc D est semblable à $-I_3$.
Ainsi $\exists P \in GL_3(\mathbb{R})$, $P^{-1}DP = -I_3$, d'où $D = P(-I_3)P^{-1} = -I_3$. On a $\boxed{D = -I_3}$, d'où
$$N = A - D = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
Ainsi
$$\boxed{\left(-I_3, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$$

Q10.

Q11. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.
Posons $P(X) = X(X-1)$. $P(A^2) = A^2(A^2-I_n) = A^2(A-I_n)(A+I_n) = 0(A+I_n) = 0$.
Donc $\boxed{\text{le polynôme } X(X-1) \text{ annule la matrice } A^2.}$
Le polynôme $X(X-1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ et annule A^2, donc $\boxed{A^2 \text{ est diagonalisable dans } M_n(\mathbb{K}).}$
Posons $D = A^2$ et $N = A - A^2$. Vérifions que (D, N) est la décomposition de Dunford de A :

- $A = D + N$ par construction.
- $D = A^2$ est diagonalisable.
- $N^2 = (A - A^2)^2 = A^2(I_n - A)^2 = A^2(A - I_n)(A - I_n) = 0$ car $A^2(A - I_n) = 0$.
  $N^2 = 0$ donc N est nilpotente.
- D et N sont des polynômes en A donc commutent : $DN = ND = A^3 - A^4$.

Donc
$$\boxed{(A^2, A - A^2) \text{ est la décomposition de Dunford de la matrice } A.}$$

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Q12. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Calculons son polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \det(XI_3 - A) \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 1 & -1 \\ -2 & X & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & X-1 & -1 \\ -1 & X-1 & X-2 \end{vmatrix} \\
&= (X-1)\begin{vmatrix} X-3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & X-2 \end{vmatrix} && \text{(linéarité)} \\
&= (X-1)\Big((X-3)(X-1)+1\Big) && (L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \text{ puis dév 2e colonne }) \\
&= (X-1)(X^2-4X+4) \\
&= (X-1)(X-2)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2.}$ Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1,2\}$. On a $\dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 1$. Calculons $\dim(\mathrm{Ker}(A - 2I_3))$.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(A-3I_3)$ est de rang 2. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A-3I_3)) = 1 < 2$. La dimension du sous-espace propre associé à 2 est strictement inférieure à la multiplicité de 2 en tant que valeur propre dans χ_A, donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } M_3(\mathbb{R}).}$$

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. Par le théorème de Cayley-Hamilton, χ_u annule u, or $\chi_u(X) = (X-1)(X-2)^2$. Les polynômes $(X-1)$ et $(X-2)^2$ sont premiers entre eux.
Par le lemme de décomposition des noyaux,

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2.}$$

Q13. Calculons les noyaux des endomorphismes demandés.

$$\begin{aligned}
A - I_3 &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \\
A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - 2I_3) &= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\
(A - 2I_3)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. & \mathrm{Ker}(A - 2I_3)^2 &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Posons alors

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Alors

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_1),\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(e_2),\ \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_3).}$$

Et $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(\chi_u(u)) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Par construction, on a $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 2e_2$. De plus

$$u(e_3) = Ae_3 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_2 + 2e_3.$$

Ecrivons la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\boxed{B = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

Q14. On remarque que :

$$B = D_1 + N_1 \text{ avec } D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et D_1 est diagonale donc diagonalisable ; $N_1^2 = 0$ donc N_1 est nilpotente ; D_1 et N_1 commutent car $D_1N_1 = N_1D_1 = 2N_1$. Donc :

$$\boxed{\left(D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } B.}$$

Puisque A et B représentent la matrice du même endomorphisme u dans la base canonique et dans la base $\mathcal{B}$, on a la formule de changement de base $P^{-1}AP = B$ i.e. $A = PBP^{-1}$. De plus on obtient l'inverse de P en remarquant que :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = e_1 - e_3, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = e_3. \quad \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.}$$

On pose $\boxed{D = PD_1P^{-1} \text{ et } N = PN_1P^{-1}.}$ Alors :

- $A = PBP^{-1} = P(D_1 + N_1)P^{-1} = PD_1P^{-1} + PN_1P^{-1} = D + N$.
- $D = PD_1P^{-1}$ est semblable à la matrice diagonale D_1 donc D est diagonalisable.
- $N^2 = (PN_1P^{-1})^2 = PN_1^2P^{-1} = 0$ donc N est nilpotente.
- D et N commutent car D_1 et N_1 commutent :

$$\begin{aligned} DN &= (PD_1P^{-1})(PN_1P^{-1}) = P(D_1N_1)P^{-1}\\ &= P(N_1D_1)P^{-1} = (PN_1P^{-1})(PD_1P^{-1}) = ND. \end{aligned}$$

Donc (D, N) est la décomposition de Dunford de A. Calculons ces matrices :

$$D = PD_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Puis :

$$N = PN_1P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Finalement

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$$

Q15. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX + c}{(X-2)^2} = \frac{(a+b)X^2 + (c-b-4a)X + 4a - c}{(X-1)(X-2)^2}.$$

Par identification des coefficients,

$$\left\{\begin{aligned} a + b &= 0.\\ c - b - 4a &= 0.\\ 4a - c &= 1. \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} a &= 1.\\ b &= -1.\\ c &= 3. \end{aligned}\right.$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{(X-1)(X-2)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{-X+3}{(X-2)^2}.}$$

On en déduit par multiplication par $(X-1)(X-2)^2$: $\quad 1 = (X-2)^2 + (-X+3)(X-1)$.
Posons $\boxed{U(X) = -X + 3, \quad V(X) = 1.}$ On a $\deg(U) = 1 < 2$, $\deg(V) = 0 < 1$ et $\boxed{(X-1)U(X) + (X-2)^2V(X) = 1.}$

Q16.
- On pose $p = V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id})$.
On a obtenu à la question **Q10** la relation $U(X)(X-1) + V(X)(X-2)^2 = 1$. On évalue cette égalité en l'endomorphisme u :

$$p + q = U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) + V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2 = 1(u) = \mathrm{Id}.$$

Donc $\boxed{p + q = \mathrm{Id}.}$

- Posons $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$.
Soit $x \in F$. Alors $(u - \mathrm{Id})(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} q(x) &= U(u) \circ (u - \mathrm{Id})(x) = 0.\\ p(x) &= p(x) + q(x) = \mathrm{Id}(x) = x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x \in F,\ p(x) = x,\ q(x) = 0.}$
Soit $x \in G$. Alors $(u - \mathrm{Id})^2(x) = 0$, donc :

$$\begin{aligned} p(x) &= V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2(x) = 0.\\ q(x) &= p(x) + q(x) = \mathrm{Id}(x) = x. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x \in G,\ p(x) = 0,\ q(x) = x.}$
Puisque $E = F \oplus G$, tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. On obtient :

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x_F) + p(x_g) &&= x_F + 0 = x_F.\\ q(x) &= q(x_F) + q(x_g) &&= 0 + x_G = x_G. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{p \text{ est le projecteur sur } F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \text{ parallèlement à } G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2}$$

et

$$\boxed{q \text{ est le projecteur sur } G = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2 \text{ parallèlement à } F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}).}$$

Q17. On pose $d = p + 2q$.
Puisque $e_1 \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, on a $p(e_1) = e_1$ et $q(e_1) = 0$. D'où $d(e_1) = p(e_1) + 2q(e_1) = e_1$.
Puisque $e_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$, on a $p(e_2) = 0$ et $q(e_2) = e_2$. D'où $d(e_2) = p(e_2) + 2q(e_2) = 2e_2$.
De même, $e_2 \in \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id})^2$ donc $d(e_3) = 2e_3$.
On obtient la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} d(e_1) & = & e_1. \\ d(e_2) & = & 2e_2. \\ d(e_3) & = & 2e_3. \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\mathrm{Mat}\,(e_1, e_2, e_3)(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

(On retrouve la matrice D_1 de la décomposition de Dunford de B.) Or

$$\begin{aligned} p &= V(u) \circ (u - 2\mathrm{Id})^2 \\ &= (X-2)^2(u) \\ &= (X^2 - 4X + 4)(u) \\ q &= U(u) \circ (u - \mathrm{Id}) \\ &= ((-X+3)(X-1))(u) \\ &= (-X^2 + 4X - 3)(u). \\ d &= p + 2q \\ &= \Big((X^2 - 4X + 4) + 2(-X^2 + 4X - 3)\Big)(u) \\ &= (-X^2 + 4X - 2)(u). \end{aligned}$$

Donc $d = (-X^2 + 4X - 2)(u)$ et $D = (-X^2 + 4X - 2)(A) = -A^2 + 4A - 2I$. Enfin $N = A - D = A^2 - 3A + 2I$.
Donc

$$\boxed{(D = -A^2 + 4A - 2I, N = A^2 - 3A + 2I) \text{ est la décomposition de Dunford de } A.}$$

Effectuons les calculs :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ A^2 & = & \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 7 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lclcl} D & = & -A^2 + 4A - 2I & = & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \\ N & = & A^2 - 3A + 2I & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}\right.$$

On retrouve le même résultat qu'à la question **Q9**.

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q18. • Soient u et v deux endomorphismes de E qui commutent.
Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ une valeur propre de u et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$. Puisque u et v commutent :

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

D'où $v(x) \in E_\lambda(u)$. On a montré que $\forall x \in E_\lambda(u), v(x) \in E_\lambda(u)$. Donc $E_\lambda(u)$ est stable par v.

$$\boxed{\text{Tout sous-espace propre de } u \text{ est stable par } v.}$$

- Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent.
On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ les valeurs propres de u deux à deux distinctes.
Pour $i \in [|1, p|]$, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
Puisque v est diagonalisable, il existe un polynôme P scindé à racines simples qui annule v, alors P annule également v_i donc v_i est diagonalisable. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de $E_{\lambda_i}(u)$ formée de vecteurs propres de v_i, alors ce sont des vecteurs propres de v. De plus $\mathcal{B}_i$ est aussi formée de vecteurs propres de u car $\forall x \in E_{\lambda_i}(u), u(x) = \lambda_i x$.
Puisque u est diagonalisable, E se décompose en somme directe des sous-espaces propres de u :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u).$$

$\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(u)$ donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E, formée de vecteurs propres de u et de v.

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ commune de diagonalisation de } u \text{ et } v.}$$

Q19. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
D'après la question **Q13**, il existe une base commune $\mathcal{B}$ de diagonalisation pour les endomorphismes associés. Donc il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$, qui est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à la base $\mathcal{B}$, telle que $P^{-1}AP = D_1$ et $P^{-1}BP = D_2$ soient deux matrices diagonales.
Alors $P^{-1}(A - B)P = P^{-1}AP - P^{-1}BP = D_1 - D_2$ est diagonale, donc $A - B$ est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices diagonalisables de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A - B \text{ est diagonalisable.}}$$

Q20. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
On suppose que A est nilpotente d'indice p et que B est nilpotente d'indice q. On a $A^p = 0$ et $B^q = 0$.

Puisque A et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$(A-B)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} A^k (-1)^{p+q-1-k} B^{p+q-1-k}.$$

Si $k \geqslant p$, alors $A^k = 0$.
Sinon, on a $k \leqslant p-1$, donc $p+q-1-k \geqslant q$, d'où $B^{p+q-1-k} = 0$.
On en déduit que tous les termes de la somme sont nuls, donc $\boxed{(A-B)^{p+q-1} = 0}$ et $A-B$ est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à $p+q-1$.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ sont deux matrices nilpotentes de } M_n(\mathbb{K}) \text{ qui commutent, alors } A-B \text{ est nilpotente.}}$$

Q21. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ à la fois diagonalisable et nilpotente.
Puisque A est nilpotente, 0 est la seule valeur propre de A. Puisque A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, A est semblable à la matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{C})$ comprenant des 0 sur la diagonale. Donc $D = 0$ et A est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A = 0$.
Réciproquement, la matrice nulle est diagonalisable et nilpotente.

$$\boxed{\text{La seule matrice de } M_n(\mathbb{K}) \text{ à la fois diagonalisable et nilpotente est la matrice nulle.}}$$

Q22. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On admet l'existence de la décomposition de Dunford. Montrons l'unicité.

- Soient (D, N) et (D', N') deux couples qui conviennent. $A = D + N = D' + N'$, avec D, D' diagonalisables, N, N' nilpotentes, $DN = ND$, $D'N' = N'D'$. De plus D et N sont des polynômes en A.
- D' commute avec N', donc avec $A = D' + N'$. Alors D' commute avec tout polynôme en A, donc D' commute avec D.
- De même, N' commute avec D', donc avec $A = D' + N'$. Alors N' commute avec tout polynôme en A, donc N' commute avec N.
- On a $D - D' = N' - N$.
- D et D' sont diagonalisables et commutent. D'après la question **Q14**, $D - D'$ est diagonalisable.
- N et N' sont nilpotents et commutent. D'après la question **Q15**, $N' - N$ est nilpotente.
- $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotente. D'après la question **Q16**, cette matrice est la matrice nulle.
- On en déduit que $D - D' = N' - N = 0$, d'où $D = D'$ et $N = N'$.

$$\boxed{\text{Il y a unicité du couple } (D, N) \text{ dans la décomposition de Dunford.}}$$