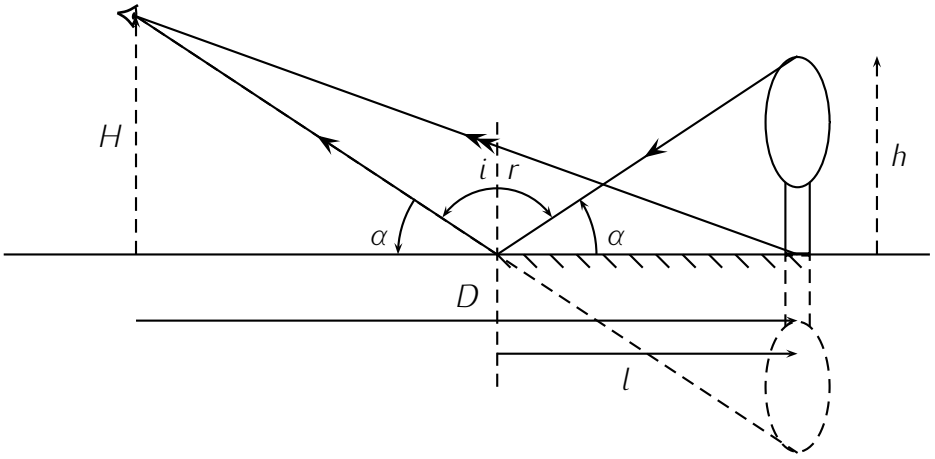
Travaux Dirigés de O_2

Exercice 1 : Réflexion sur un miroir horizontal.

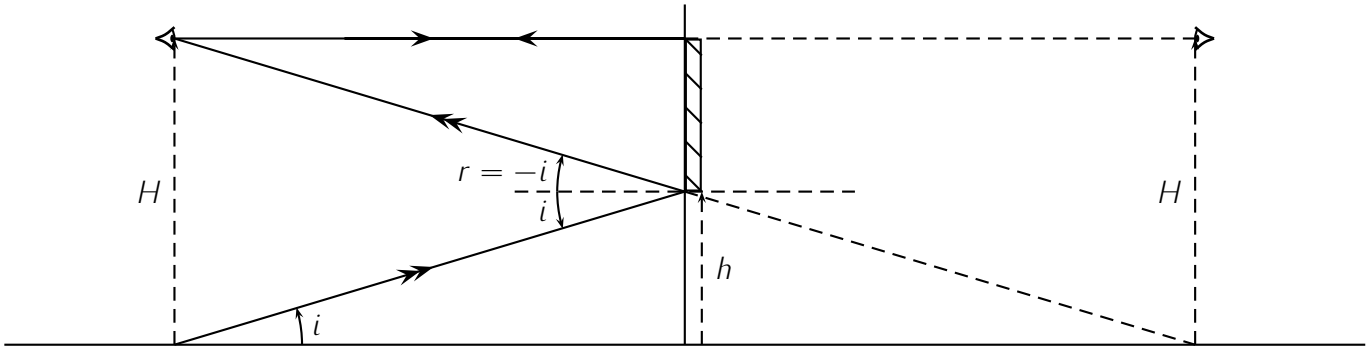
Un homme dont les yeux sont placés à $H = 1{,}80$ m du sol cherche à observer un petit arbre de hauteur $h = 1{,}50$ m situé à une distance $D = 5{,}00$ m par réflexion sur un miroir plan posé à plat sur le sol.
Déterminer la position et la largeur minimale du miroir.
Comme souvent optique, le plus difficile est de tracer une figure correcte.
Restera ensuite à utiliser des relations de l'optique (lois de Snell-Descartes) et mathématiques (trigonométrie, somme des angles orientés d'un triangle ...).
Commençons par la figure : dessinons d'abord le reflet de l'arbre dans le miroir, traçons ensuite les rayons limites arrivant à l'œil de l'observateur.



Il faut bien comprendre que l'observateur regarde l'image de l'arbre dans le miroir et non le miroir lui même.
On voit sur la figure que le miroir doit atteindre le pied de l'arbre.
D'après la loi de la réfraction, $i = -r$ et on peut écrire $\tan\alpha = \frac{h}{l} = \frac{H}{D-l}$ où l est la longueur du miroir.
On en déduit $l = \frac{hD}{H+h} \simeq 2{,}27$ m.

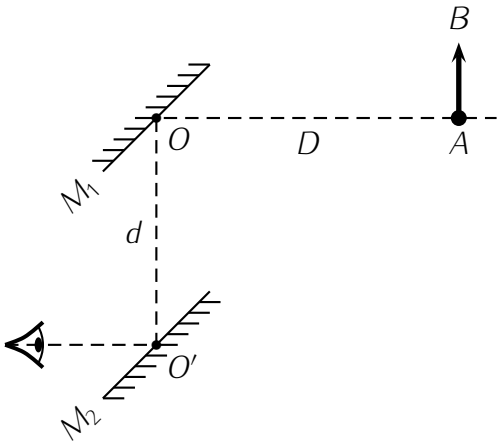
Exercice 2 : Réflexion sur un miroir vertical.

Un homme dont les yeux sont placés à $H = 1{,}80$ m du sol cherche à s'observer entièrement par réflexion dans un miroir plan vertical.
Déterminer la position et la hauteur minimale du miroir.
Comme souvent optique, le plus difficile est de tracer une figure correcte. Restera ensuite à utiliser des relations de l'optique (lois de Snell-Descartes) et mathématiques (trigonométrie, somme des angles orientés d'un triangle ...).



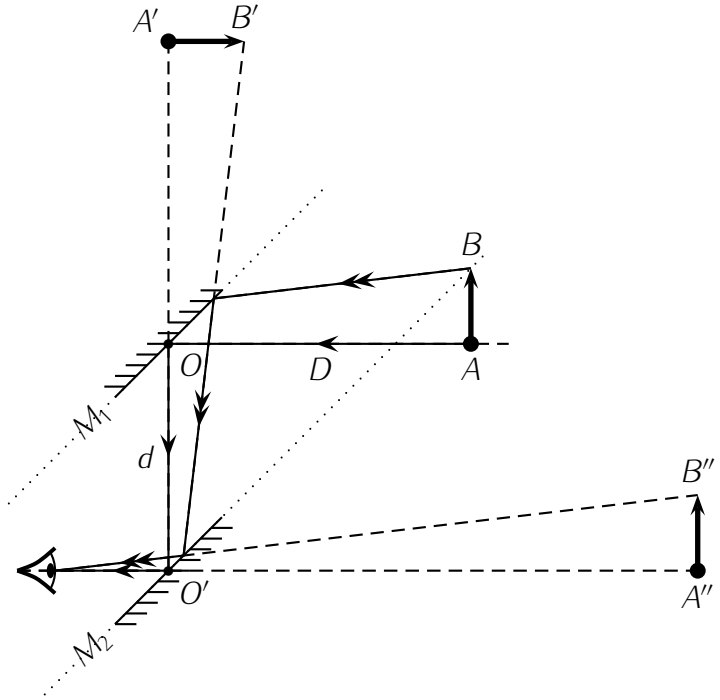
Commençons par la figure : dessinons d'abord le reflet de l'homme dans le miroir, traçons ensuite les rayons limite arrivant à son œil.
On voit directement sur cette figure que quelque soit la distance qui sépare l'homme du miroir, ce dernier doit monter à hauteur de l'œil ($H = 1{,}8$ m) et descendre jusqu'à $h = \frac{H}{2} = 90$ cm.

Exercice 3 : Image d'un objet par un périscope.



Un périscope simple est un système optique formé de deux miroirs plans qui permet par exemple d'observer un défilé par dessus une foule.
Les périscopes de sous-marins sont des systèmes optiques plus compliqués.
On suppose que les plans des miroirs font un angle de 45° avec la verticale.
L'objet AB observé est lui aussi vertical et à la distance D du centre O du miroir supérieur.
La distance OO' entre les deux centres des miroirs est d.

1. Par construction, déterminer la position de $A''B''$, l'image de AB par le système optique.
2. Quelle est la valeur du grandissement ?
3. Le système optique est-il stigmatique ?
4. Tracer deux rayons issus de AB et qui traversent le système optique et parviennent à l'œil. Préciser la nature de $A''B''$.



1. Construction :
   On place $A'B'$ l'image de AB par le premier miroir (c'est son symétrique par rapport au plan du miroir M_1) puis $A''B''$ celle de $A'B'$ par rapport au second miroir ($A''B''$ est le symétrique de $A'B'$ par rapport au plan du miroir M_2).
   On a ainsi montré que $A''B''$ est verticale droite et que $O'A'' = d + D$
2. Le grandissement est $\gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = +1$.
3. Les deux miroirs plans étant stigmatiques, le système est lui même rigoureusement stigmatique.
4. On trace deux rayons issus de B et qui traversent le système optique.
   Pour le premier, on peut prendre un rayon issu de A et passant par O et O'.
   Pour le second, issu de B, on utilise le fait qu'après réflexion sur M_1, il semble provenir de B', puis de B'' après réflexion sur M_2. Pour faciliter la construction, on a intérêt à partir de l'œil et remonter le sens de la lumière (utilisation du principe de retour inverse de la lumière).

On remarque sur la figure que les rayons parvenant finalement à l'œil "semblent provenir" de $A''B''$, c'est donc une image virtuelle.
Remarque : pour l'œil qui l'observe, il s'agit d'un objet virtuel dont il fait une image réelle sur la rétine.

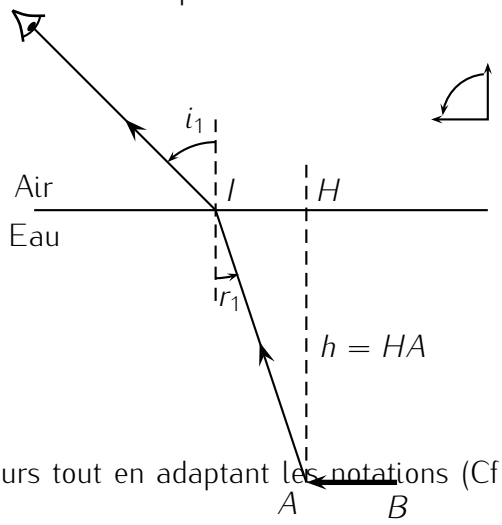
Exercice 4 : Applications directes du cours

1. Une camera aérienne survolant la Terre à une altitude de 4000 m de distance focale 50 cm produit une image de format 18 cm sur 18 cm d'une ville. Calculer la surface photographié.
2. Considérons une paire de lunettes correctrices pour la myopie. L'ordonnance indique une vergence de -2δ.
   — Quelle est la distance focale image de la paire de lunettes ? Quelle est le type de lentilles utilisées ?
   — Muni de cette paire de lunettes, je lis un livre situé à 30 cm de mon visage. Quelle est la distance de l'image de cet ouvrage à travers les lunettes ?
3. On donne un lentille mince convergente de 50 cm de distance focale. À quelle distance faut-il placer un objet pour que son image réelle soit 5 fois plus grande ?
4. Même question pour une image virtuelle.
5. On donne point lumineux P placé à 75 cm d'une lentille convergente dont la distance focale est 50 cm. Que voit-on sur un écran placé de l'autre côté de la lentille à 1 m ? Faire varier la position de l'écran et expliquer ce que l'on voit.
6. Même question avec une lentille divergente.
7. Soit un appareil photo composé d'une seule lentille de 50 mm de focale. Un PCSI2 de 1,70 m se tient à 10 m devant l'objectif. Montrer que la distance lentille/capteur doit être de 50,3 mm. Déterminer la taille du PCSI2 sur la photographie.

Exercice 5 : Pêcheur au harpon.

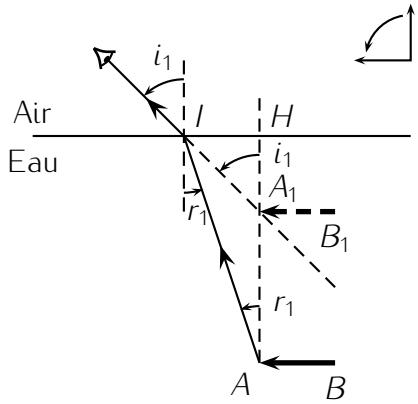
On considère $n_{\text{air}} \simeq 1{,}00$ et $n_{\text{eau}} = n \simeq 1{,}33$.

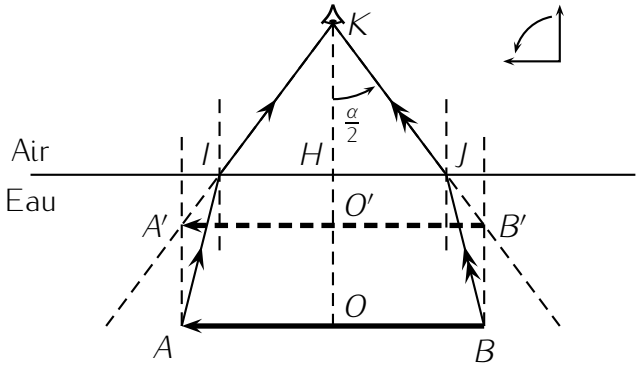
1. Une truite assimilée à un segment $AB = 40$ cm horizontal se situe à la profondeur $HA = 1$ m.
   Un pêcheur observe A_1B_1, l'image de AB par le dioptre, sous une incidence (pour A_1) $i_1 = 30°$.
   Puis en se rapprochant sous une incidence $i_2 = 10°$.
   Exprimer HA_1 et HA_2 la position des images A_1 et A_2 vues par le pêcheur en fonction de h, n et i_1 ou i_2. Faire les applications numériques et conclure.



2. Le pêcheur étant maintenant quasi vertical par rapport au milieu O de la truite, quelle est la position apparente du poisson et son diamètre angulaire apparent α. On considérera que les yeux du pêcheur sont situés à 1 m de la surface de l'eau ?

1. Pour réaliser la figure, on pourra s'inspirer de celle du cours tout en adaptant les notations (Cf ci-dessous à gauche).
   Comme pour l'instant i n'est pas faible devant 1 radian, on ne peut pas linéariser les relations de Snell Descartes ($\sin i_1 \neq i_1$) et on garde $n_{\text{air}} \sin i_1 = n_{\text{eau}} \sin r_1 \Rightarrow \sin i_1 = n.\sin r_1$.





Dans IHA_1 et IHA, deux triangles rectangles ayant le coté IH commun, $\tan i_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{A_1H}}$ et $\tan r_1 = \frac{\overline{HI}}{\overline{AH}}$ d'où $\overline{HA_1} = \frac{\tan i_1}{\tan r_1}\overline{HA} = \frac{\sin i_1 . \cos r_1}{\sin r_1 . \cos i_1}\overline{HA}$.

Pour éliminer r_1 dans l'expression précédente, on utilise $\frac{\sin i_1}{\sin r_1} = n$ et $\cos^2 r_1 + \sin^2 r_1 = 1 \Rightarrow \cos r_1 = \sqrt{1 - \sin^2 r_1} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}$.

On en déduit finalement $\overline{HA_1} = \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}\overline{HA}$. De même, $\overline{HA_2} = \frac{\cos i_2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_2}}\overline{HA}$.

Applications numériques : pour $\overline{HA} = -1$ m et $i_1 = 30°$ on calcule $\overline{HA_1} \simeq -70{,}2$ cm et pour $i_2 = 10°$, $\overline{HA_2} \simeq -75$ cm.

Remarque : si on se place dans les conditions de Gauss (i faible devant 1 radian), l'expression se simplifie (Cf cours) et on obtient $\overline{HA'} = \frac{\overline{HA}}{n} \simeq 75$ cm.

Pour le pécheur, le poisson semble plus proche de la surface qu'il n'est en réalité et il risque de rentrer bredouille.

2. À nouveau le poisson semble plus proche de la surface, on a un effet loupe.

   Si on fait l'hypothèse des angles faibles ($\frac{\alpha}{2} \ll 1$ radian à vérifier après calcul), on a $\overline{HO'} = \frac{\overline{HO}}{n}$ et $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{O'A'}}{\overline{O'K}} \simeq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\overline{BA}}{\overline{O'H} + \overline{HO'}}$.

   L'application numérique donne $\alpha \simeq 13°$ ce qui confirme à posteriori l'hypothèse des angles faibles.

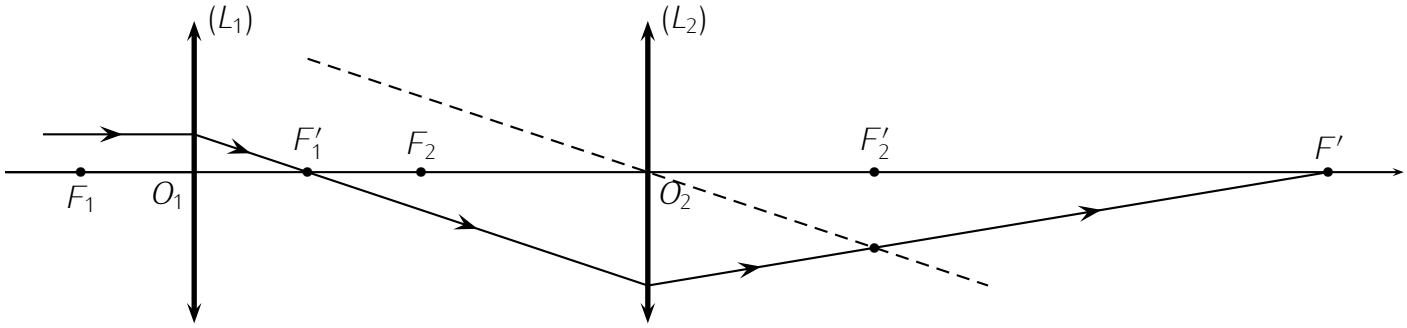
Exercice 6 : Plans principaux d'un système de deux lentilles

On considère l'association de deux lentilles de distance focale f'_1 et f'_2. On appelle f' la distance focale de l'association et $e = \overline{O_1O_2}$. La distance focale de l'association est égale à $f' = \overline{H'F'} = -\overline{HF}$ où H et H' sont les points d'intersection entre l'axe optique et les plans principaux : un objet d'un plan principal a son image dans l'autre plan principal avec un grandissement de un. Les points F et F' sont les foyers objet et image de l'association.

On donne $f'_1 = 3$ cm, $f'_2 = 6$ cm et $e = 12$ cm.

1. Déterminer la position de F' par construction graphique puis par le calcul.
2. Déterminer la position des plan principaux.
3. En déduire la valeur de f'.

1. Déterminer la position de F' par construction graphique puis par le calcul.



F' est l'image de F'_1 par L_2 d'où par application de la relation de conjugaison de Newton $\overline{F_2F'_1}.\overline{F'_2F'} = -f'^2_2 \Rightarrow \overline{F'_2F'} = 12$ cm et $\overline{O_2F'_2} = 18$ cm

2. Par définition des plans focaux et application des relations sur le grandissement,

$$\gamma = \gamma_1.\gamma_2 = \frac{\overline{H'B'}}{\overline{HB}} \Rightarrow 1 = \frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{O_1H}}.\frac{\overline{O_2H'}}{\overline{O_2H_1}}$$

avec d'après les relations de Descartes $\overline{O_1H_1} = \frac{\overline{O_1H}.f'_1}{f'_1 + \overline{O_1H}}$ et $\overline{O_2H'} = \frac{\overline{O_2H_1}.f'_2}{f'_2 + \overline{O_2H_1}}$ où $\overline{O_2H_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1H_1}$.

En posant $x = \overline{O_1H}$, on obtient l'équation

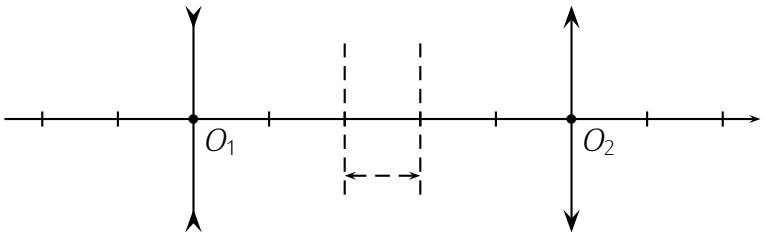
$$1 = \frac{f_1'}{f_1' + x} \cdot \frac{f_2'}{f_2' - e + \frac{xf_1'}{x+f_1'}} \Rightarrow x = \frac{ef_1'}{f_1' + f_2' - e} = -12 \text{ cm}$$

On en déduit ensuite $\overline{O_1H_1} = \frac{xf_1'}{x+f_1'} = 4$ cm d'où $\overline{O_2H_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1H_1} = -e + x = -8$ cm et $\overline{O_2H'} = \frac{\overline{O_2H_1}.f_2'}{\overline{O_2H_1}+f_2'} = 24$ cm.

3. On a enfin $f' = \overline{H'F'} = \overline{H'O_2} + \overline{O_2F'} = -24 + 18 = -6$ cm

Exercice 7 : Calcul algébrique de la position des foyers d'un doublet.

On donne les distances focales pour chacune des deux lentilles représentées ci-contre : $|f_1'| = 3a$ et $|f_2'| = 2a$, avec $a > 0$. Déterminer par le calcul puis par tracé, la position des foyers principaux du système. $\overline{O_2F'} = 8a/3$ et $\overline{O_1F} = 3a/2$.



Exercice 8 : Focométrie, la totale.

La focométrie est la recherche de la distance focale d'un système optique : lentilles minces sphériques.

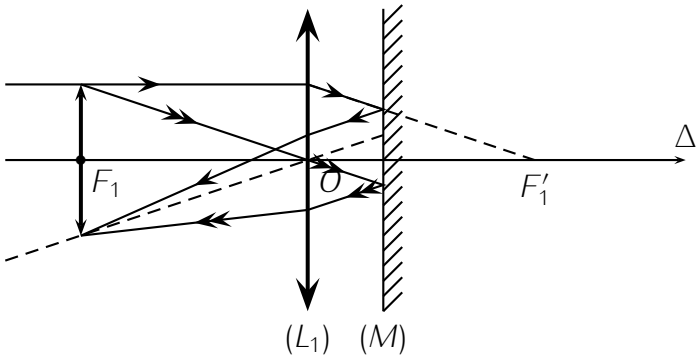
1. Détermination très rapide. Comment savoir, au touché si une lentille est convergente ou divergente ?
2. Détermination rapide. Montrer, à l'aide de constructions graphiques qu'il est possible de différentier une lentille convergente d'une lentille divergente en regardant un objet suffisamment près : $|\overline{AO}| < |f|$.
3. Méthode d'auto-collimation. On déplace un objet AB face à une lentille accolée ou non à un miroir plan jusqu'à ce que l'image $A'B'$ de AB se forme dans le plan de l'objet. Montrer que cette méthode permet de déterminer la distance focale de la lentille : on tracera l'image de AB si A en F. Peut-on directement utiliser cette méthode avec une lentille divergente ?
4. Méthode de BESSEL Un objet AB et un écran (E) sont maintenus fixes et distants de D. Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille convergente de distance focale f' image à déterminer.

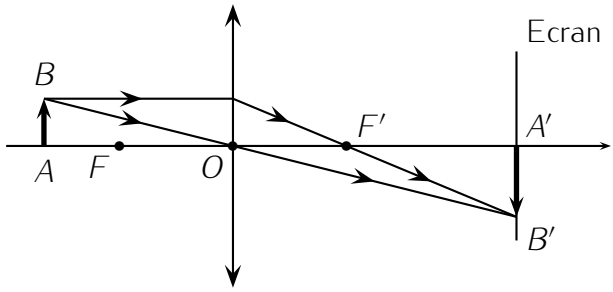
   Montrer que si $D > 4f'$, il existe deux positions de la lentille distantes de d pour lesquelles il y a une image nette de l'objet sur l'écran. Exprimer f' en fonction de d et D.
5. Méthode par conjugaison. Montrer qu'on peut déterminer la distance focale d'une lentille mince par utilisation d'une formule de conjugaison. Laquelle choisiriez-vous ? Quelle type de courbe traceriez-vous à partir d'un tableau de valeurs composé de couples ($p = \overline{OA}$,$p' = \overline{OA'}$) pour déterminer f' ?
6. Expliquez comment on peut mesurer la distance focale d'une lentille (L_1) divergente inconnue en lui accolant utilisant une deuxième lentille (L_2), celle-ci connue et convergente.
7. Méthode de BADAL. On utilise deux lentilles convergentes (L_1) et (L_2) distantes de $\overline{O_1O_2} > f_2'$. Faire une figure.

   Un objet ponctuel A est placé en F_1 (par auto collimation) et a pour image A''. Déterminer la position de A''.

   On intercale une lentille divergente (L_3) dont on veut mesurer la distance focale telle que $O_3 = F_2$ Faire une figure et déterminer une méthode de mesure de f_3'.

1. Si le rayon de courbure des dioptres qui constituent la lentille sont assez faibles, on peut déterminer, au touché si une lentille est à bords minces (convergente) ou à bords épais (divergente) ?
2. En se reportant au polycopié donné en annexe du TD ou en observant les hyperboles de conjugaison, on s'aperçoit qu'on l'objet plus grand si la lentille est convergente (effet loupe) et plus petit si elle est divergente.
3. Méthode d'auto-collimation : tracé ci-dessous à gauche.





On ne peut pas utiliser directement la méthode précédente avec une lentille divergente car son foyer principal image est virtuel et ne peut donc pas être projeté.

4. Méthode de BESSEL.

   On commence par tracer une figure sur laquelle on représente l'objet (réel), la lentille et l'écran sur lequel se forme l'image réelle (plus haut à droite).

   En posant ensuite $x = \overline{AO}$ et $D = \overline{AA'}$ soit $\overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} = -x + D$, la relation de conjugaison de Descartes va prendre la forme $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f'}$

   Ce qui donne $-\frac{D-x+x}{x(D-x)} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -Df' = xD - x^2$ et on aboutit à une équation du second degré en x sous la forme $x^2 - Dx + Df' = 0$.

   On calcule le discriminant $\Delta = D^2 - 4Df'$. L'équation comporte 2 solutions réelles si $\Delta > 0$, c'est à dire si $D > 4f'$. On a alors les deux solution suivantes : $x_1 = \frac{1}{2}(D - \sqrt{D^2 - 4Df'})$ et $x_2 = \frac{1}{2}(D + \sqrt{D^2 - 4Df'})$ qui correspondent à deux postions O_1 et O_2 possibles pour la lentille et pour lesquelles $A'B'$ est nette à l'écran (image réelle inversée agrandie si L proche de AB et plus petite si L est plus proche de l'écran).

   La distance entre ces deux postions est $d = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A} + \overline{AO_2} = -x_1 + x_2 = \sqrt{\Delta} = \sqrt{D^2 - 4Df'} \Rightarrow f' = \frac{D^2-d^2}{4D}$.

5. Méthode par conjugaison.

   Les formules de conjugaison relient la position de l'objet à celle de l'image et à la distance focale. En mesurant les deux premières, on peut effectivement calculer f'. On choisira d'utiliser la relation de conjugaison avec origine au centre car c'est le seul point qu'on peut directement visualiser sur le banc d'optique (F' et F ne sont pas des points matériels).

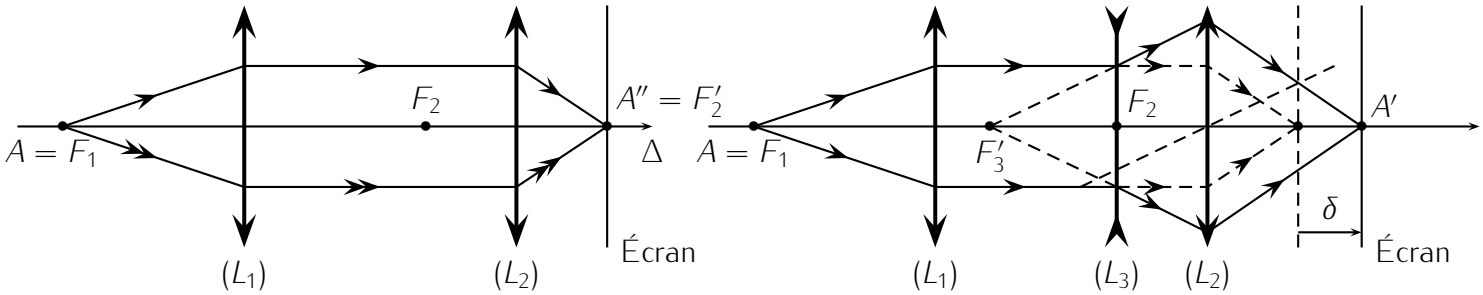
   Partant de $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$ où $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$, on obtient $f' = \frac{pp'}{p-p'}$.

   À partir du tableau de couples (p,p'), on tracera $\frac{1}{p'}$ en fonction de $\frac{1}{p}$ pour obtenir des points à peu près alignés (incertitude de mesure) suivant une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{f'}$. Une régression linéaire à la calculatrice ou le tracé de la droite moyenne permettra d'obtenir f' avec une bonne précision.

6. Les deux lentilles minces étant accolées, on peut utiliser le théorème des vergences : $V = V_1 + V_2$ où V est la vergence de la lentille résultante. Si $v > 0 \iff V_2 > -V_1 = |V_1|$, la lentille résultante est convergente et on peut utiliser la méthode d'auto collimation pour mesure V puis en déduire $V_1 = V - V_2$.

7. Méthode de BADAL.

   Pour le moment, on n'utilise que deux lentiles convergentes : (L_1) et (L_2) et on a imposé $A = F_1$.



On cherche l'image de A par le système $\{ (L_1) + (L_2) \}$.
Nul besoin d'utiliser une relation de conjugaison : $A = F_1 - (L_1) \to A_1$ à l'∞ $-(L_2) \to F_2' = A''$.
On intercale, en F_2, une lentille divergente L_3 de distance focale inconnue (figure de droite).
Si on retrouve alors une image nette A' en déplaçant l'écran d'une distance δ, c'est que A' l'image de F_3' par L_2 est sur l'écran. En utilisant la relation de conjugaison de Newton, on a

$$\overline{F_2F_3'}.\overline{F_2'A'} = -f_2'^2 \Rightarrow f_3' = -\frac{f_2'^2}{\delta}$$