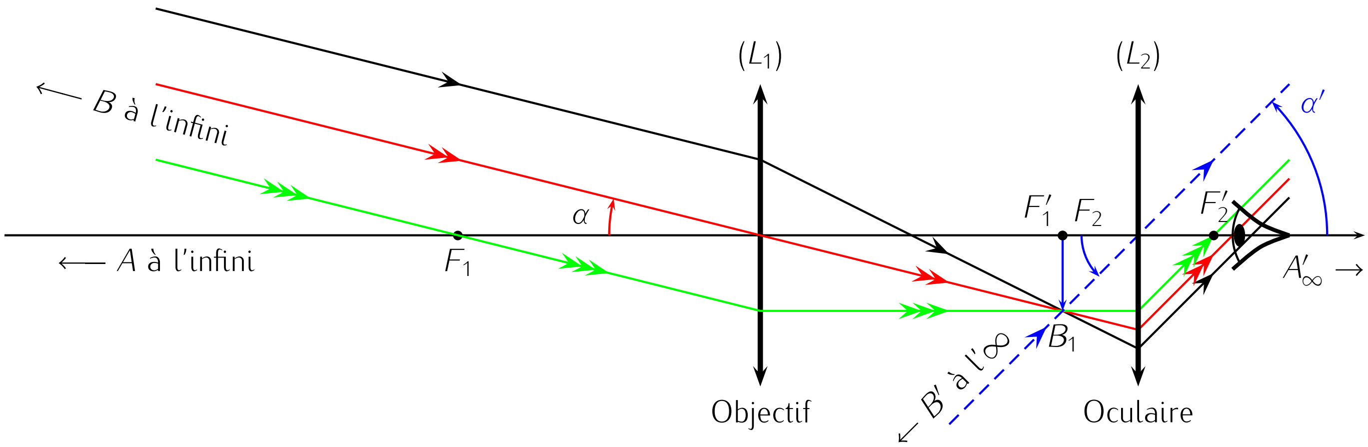
Modèles d'instruments d'optique

Exercice 1 : Lunette astronomique de Meudon.

La lunette astronomique de Meudon, en France, est schématisée par l'association de deux lentilles minces convergentes, l'une, l'objectif (L_1) de focale $f'_1 = 16$ m et l'autre, l'oculaire (L_2) de distance focale $f'_2 = 4$ cm. Le diamètre de l'objectif est $D = 80$ cm.

1. Faire un schéma de la lunette quand elle est réglée à l'infini. Dessiner la marche d'un faisceau lumineux issu d'un objet situé à l'infini mais pas sur l'axe optique, les rayons arrivent alors sur l'objectif en faisant un angle α avec l'axe optique.
2. Calculer la valeur du grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ où α' est l'angle que font les rayons avec l'axe optique en sortie du système.
3. Situer le cercle oculaire (image de l'objectif à travers (L_2)) et calculer son diamètre d.
4. On observe une étoile dont la diamètre angulaire apparent est 0,02 ″. Montrer que cette étoile apparaît ponctuelle pour un observateur qui regarde dans la lunette, la résolution angulaire de l'œil est d'environs 1,5′ Quel est alors l'intérêt ?

1. Si la lunette est réglée à l'infini, c'est un système afocal et $AB_\infty - (L_1) \rightarrow A_1B_1 - (L_2) \rightarrow A'B'_\infty$. L'image intermédiaire A_1B_1 est alors à la fois dans le plan focal image de (L_1) et dans le plan focal objet de (L_2).



Pour dessiner correctement le faisceau issu de AB à travers le système optique, on a tout intérêt à utiliser l'image intermédiaire A_1B_1. Le rayon qui passerait par B_1 et O_2 donne l'angle α'.

2. En utilisant à nouveau l'image intermédiaire A_1B_1, on fait apparaître les triangles rectangles $O_1F'_1B_1$ et $F_2O_2B_1$ de coté F_2B_1 commun. Dans ces triangles, on écrit $\alpha \simeq \tan\alpha = -\frac{\overline{B_1F'_1}}{\overline{O_1F'_1}}$ ($\alpha < 0$ sur la figure) et $\alpha' \simeq \tan\alpha' = \frac{\overline{B_1F_2}}{\overline{F_2O_2}}$.

   On en déduit $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\overline{B_1F_2}}{\overline{F_2O_2}} \times \frac{\overline{B_1F'_2}}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{f'_2}{f'_1} = -\frac{16}{4.10^{-2}} = -400$.

   Remarque : si on n'oriente pas les angles, on peut obtenir $+400$ mais le signe $-$ permet de monter que l'image finale ($A'B'$ vue par l'œil) sera inversée.

3. Par définition, $(L_1) - (L_2) \rightarrow \mathcal{C}$: cercle oculaire.

   Vu la distance O_1O_2 par rapport à la distance focale de l'oculaire, le cercle oculaire, image de (L_1) par (L_2) est dans le plan focal image de (L_2) : on a $\overline{O_2C} = f'_2 = 4$ cm.

   En utilisant la formule du grandissement, $|\gamma_2| = \left|\frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_2O_1}}\right| = \frac{d}{D} \Rightarrow d = \frac{f'_2}{f'_1+f'_2}D \simeq 2$ mm ce qui correspond environ à l'ouverture maximale de l'iris de l'œil. On aura donc intérêt à le placer au niveau du cercle oculaire pour récolter un maximum de lumière.

4. À travers la lunette, grâce au grossissement, on verra l'étoile double sous un diamètre angulaire $\alpha' = G.\alpha = 8''$ ce qui reste largement inférieur à la limite de résolution de l'œil et ce dernier ne pourra pas séparer les deux étoiles. Par contre, l'intérêt de la lunette est de collecter beaucoup de lumière : toute la lumière arrivant sur l'objectif ($D = 80$ cm) est concentrée au niveau du cercle oculaire.

Exercice 2 : **Système afocal de trois lentilles.**

Soient trois lentilles de distances focales respectives $f_1' = -1{,}5$ m, $f_2' = 40$ cm et $f_3' = -20$ cm.
La lentille (L_2) est placée entre les lentilles (L_1) et (L_3).
Le système est centré, aplanétique et stigmatique.

1. Donner la signification de ces trois derniers termes.
2. On veut que le système soit afocal c'est à dire que ses foyers principaux soient rejetés à l'infini. Déterminer alors la relation entre les trois distances focales et les distances d_1 séparant (L_1) de (L_2) et d_2 séparant (L_2) de (L_3). Calculer d_2 si $d_1 = 50$ cm.
3. Faire une figure du système à l'échelle et déterminer graphiquement si le grandissement transversal est inférieur ou supérieur à 1.

1. Voir cours. 2. $\frac{1}{d_2 - f_3'} + \frac{1}{d_1 - f_1'} = \frac{1}{f_2'}$, $d_2 = 30$ cm. 3. $\gamma < 1$.

Exercice 3 : **Appareil photographique.**

1. L'objectif d'un appareil photographique est assimilable à une lentille mince convergente (L_1) de 10 cm de distance focale. On photographie une tour de 50 m de haut située à 1 km.
   (a) À quelle distance de l'objectif se situe l'image A_1B_1 obtenue ?
   (b) Quelle est la taille de cette image ?
2. On associe à cet objectif une lentille mince divergente (L_2) de distance focale -4 cm. Le capteur est située à 12 cm de (L_2) on règle $\overline{O_1O_2}$ jusqu'à obtention, sur le capteur, d'une image finale $A'B'$ nette.
   (a) Quelle est alors la distance $\overline{O_1O_2}$ entre (L_1) et (L_2) ?
   (b) Quelle est la taille de l'image dans ce cas ?
   (c) Quel est l'intérêt de (L_2) ?
   (d) Sur un schéma à l'échelle 1/1, positionner les lentilles (L_1) et (L_2), les images A_1B_1 et $A'B'$ en utilisant les valeurs numériques précédentes. Mettre en évidence sur ce schéma α, l'angle apparent sous lequel on voit l'objet depuis le centre optique de (L_1).
   (e) Sur le même schéma, tracer la marche, à travers (L_1) et (L_2), d'un faisceau lumineux incident couvrant toute la lentille (L_1) dans les deux cas suivants :
   — faisceau parallèle de même direction que l'axe optique du système.
   — faisceau parallèle, incliné selon l'angle apparent α.
3. On reprend l'appareil photographique de la question 1.
   (a) Quelle devrait être la distance focale d'une lentille convergente unique qui donnerait de la même tour, une image de même taille que celle donnée par le système $((L_1),(L_2))$ précédent ?
   (b) Pourquoi utilise-t-on la solution de la question 2. plutôt que celle de la question 3. pour fabriquer les appareils photographiques ?

1. Étude de l'objectif.
   (a) Étant donné que la distance objet – lentille ($\overline{AO_1} = 1$ km) est très supérieure à la distance focale $f_1' = 10$ cm de la lentille, l'image intermédiaire A_1B_1 se trouve dans le plan focal image de (L_1). On a alors $\overline{O_1A_1} = f_1' = 10$ cm.

(b) Par utilisation de le formule du grandissement de la lentille (L_1), $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \Rightarrow \overline{A_1B_1} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}.\overline{AB} = \frac{10.10^{-2}}{-10.10^4}.50 = -5.10^{-3}$ m soit une image intermédiaire de hauteur 5 mm et inversée.

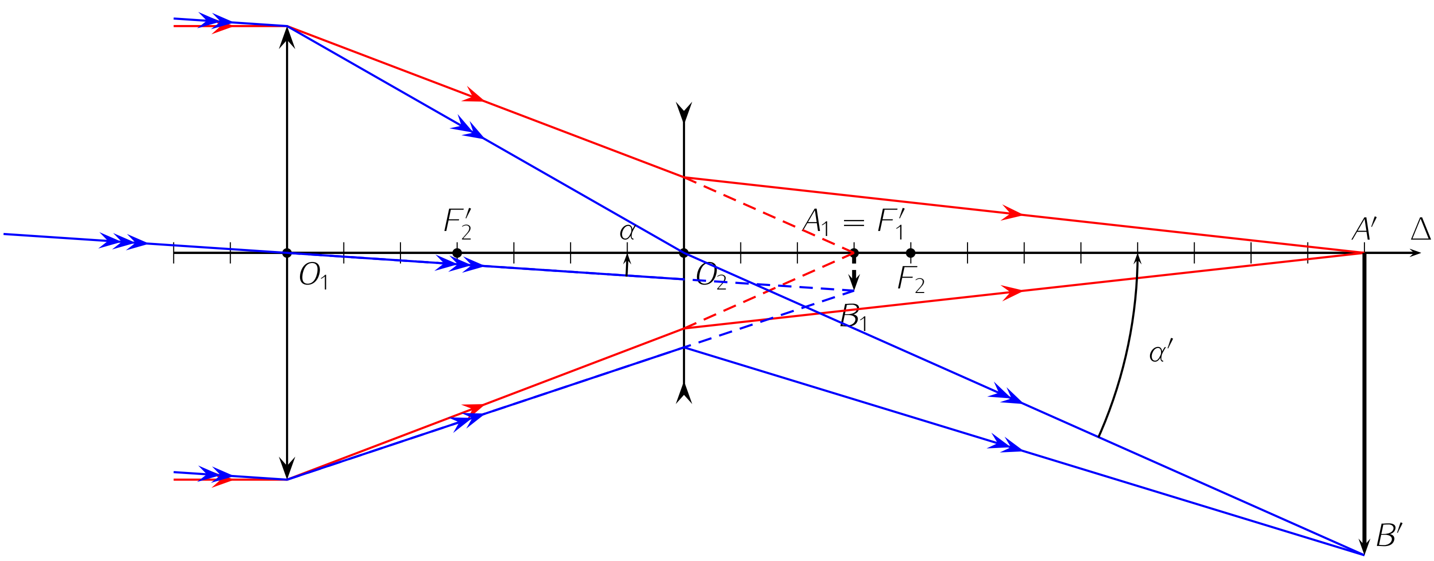
2. Ajout de la lentille divergente (L_2).

(a) On a maintenant $AB - (L_1) \to A_1B_1 - (L_2) \to A'B'$ avec $\overline{O_2B'} = 12$ cm et $f'_2 = -4$ cm. On connaît la position de A_1B_1 et celle de $A'B'$, on va donc utiliser la relation de conjugaison de L_2 pour déterminer sa position. $\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \overline{O_2A_1} = \frac{f'_2.\overline{O_2A'}}{f'_2 - \overline{O_2A'}} = \frac{-4.12}{-4-12} = 3$ cm. On en déduit ensuite $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1O_2} = 10 - 3 = 7$ cm.

(b) En utilisant à nouveau la formule du grandissement, $\gamma_2 = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}.\overline{A_1B_1} = \frac{12}{3}.(-0{,}5) = -2$ cm.

(c) On voit que (L_2) permet d'obtenir une image finale quatre fois plus grande.

(d) Figure :



Pour placer α on utilise le fait que les rayons issus de B et qui arrivent sur (L_1) en faisant l'angle α avec Δ passerait en B_1 (l'image de B par (L_1)) si (L_2) n'existait pas.

(e) On complète le tracé :
— le faisceau parallèle à Δ converge vers A_1 puis A'.
— le faisceau parallèle et incliné selon α converge vers B_1 puis B'.

3. Retour à l'appareil photo à une lentille : (L_1). On a cette fois $AB - (L_1) \to A'B'$.

(a) Comme l'objet reste situé très loin, son image $A'B'$ par (L_1) reste dans le plan focal image, c'est à dire $\overline{O_1A'} = f'_1$. D'après la formule du grandissement, $\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = \frac{f'_1}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow f'_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.\overline{O_1A} = \frac{4.10^{-2}}{50}.(-10^3) = 0{,}4$ m soit une distance focale de 40 cm.

(b) On préfère donc ajouter une lentille convergente comme décrit lors de la question 2. pour limiter l'encombrement des appareils photographiques.

Exercice 4 : Ouverture d'un appareil photographique.

Un appareil photographique argentique est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ mm. La pellicule est placée à la distance d de la lentille. Les rayons incidents sont limités par un diaphragme de diamètre D et dont l'ouverture est circulaire.

1. On souhaite photographier des objets à une distance variant de $x = 0{,}6$ m à l'infini par rapport à la lentille. Calculer les distances d_{min} et d_{max} de la pellicule pour lesquelles l'image formée est nette.

2. On défini un nombre N appelé nombre d'ouverture vérifiant $\frac{1}{N} = \frac{D}{f'}$ (appelée ouverture relative). Sur les objectifs, on peut faire varier le diamètre du diaphragme d'entrée de manière discontinue, ce qui est repéré sur l'objectif par une série de nombres N dont les valeurs sont 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 ; 16. Sur les boîtiers d'appareils photographiques, on dispose d'autre part des temps d'exposition nécessaire respectifs (en s) : $t_e = \frac{1}{15}$; $\frac{1}{30}$; $\frac{1}{60}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{250}$; $\frac{1}{500}$. Expliquez.
3. La pellicule est caractérisée par un grain $g = 0{,}02$ mm (taille du grain de l'émulsion de la pellicule). On souhaite que la taille de la tache image d'un objet A reste inférieure à g pour que l'image soit satisfaisante. La mise au point étant faite à *l'infini*, mettre en évidence à l'aide d'une construction géométrique, la distance minimale L_0, dite "hyperfocale", qui sépare A de la lentille pour que l'image soit correcte. Exprimer L_0 en fonction de g, f' et N.
4. Soit P_f la profondeur du champ (zone de l'espace objet qui donne une image nette). Qualitativement, comment P_f varie-t-elle avec N, avec f' ?

1. $d_{\min} = 50$ mm et $d_{\max} = 54{,}5$ mm. 2. Si N varie, D varie, il entre moins de lumière dans l'appareil et on doit adapter t_e. 3. $L_0 = f'^2/(gN)$. 4. Si L_0 diminue donc si f' diminue ou N augmente, P_f augmente (voir figure).

Exercice 5 : **Lunette de Galilée, effet de Zoom.**

La lunette de Galilée est formée d'une lentille objectif ((L_1) : O_1, $f'_1 = 20$ cm) et d'une lentille oculaire divergente ((L) : O, $f' < 0$). Le foyer objet F de (L) coïncide avec le foyer image F'_1 de (L_1). La longueur $l = O_1O$ vaut 15 cm. On pointe un objet AB de 2 cm à 30 cm devant l'objectif.

1. Construire l'image $A'B'$ de AB. Est-elle réelle ou virtuelle ?
2. Calculer $p' = \overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ (valeurs numériques).
3. Le grandissement de l'ensemble dépend-il de la position de AB ? On tracera un rayon issu de B et arrivant sur le système parallèlement à l'axe optique.
4. Cet appareil est destiné à voir des objets éloignés. En appelant α le diamètre angulaire apparent d'un objet à l'infini et α' celui de son image, calculer le grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de cette lunette.

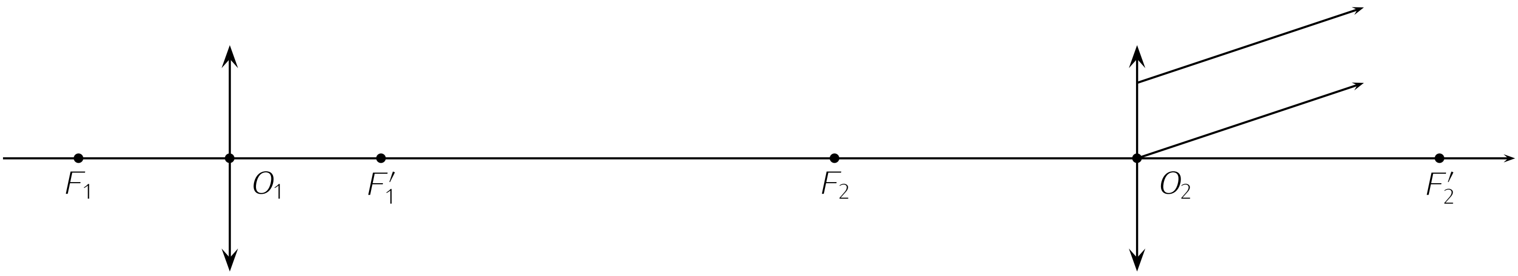
1.a. Virtuelle. 1.b. $p' = -5{,}625$ cm et $\overline{A'B'} = 0{,}5$ cm. 1.c. $\gamma = 4\ \forall\ p$ 1.d. $G = 4$. 2.a. $f_2 = -4$ cm. 2.b. $p' = \frac{20(x^2-35x+320)}{x(x-15)} < 0$ en cm et $G = \frac{80}{x^2-35x+320}$. 2.c. G maximum pour $x = 12$ cm : zoom.

Exercice 6 : **Étude d'un microscope.**

Un microscope peut être modélisé par deux lentilles convergentes (L_1) et (L_2) alignées sur le même axe optique, entourées d'air.
(L_1) modélise l'objectif et a une distance focale image $f'_1 = 2$ mm. (L_2) modélise l'oculaire et a une distance focale image $f'_2 = 30$ mm. La distance $\Delta = \overline{F'_1F_2}$ entre le foyer image de (L_1) et le foyer objet de (L_2) vaut 160 mm, c'est l'intervalle optique du microscope.
La distance minimale de vision de l'œil est $d_m = 25$ cm : c'est le ponctum proximum, la distance au dessous de laquelle l'œil n'arrive plus a accommoder : l'image n'est plus nette.
Par contre, l'œil normal voit net un objet situé à l'infini et cela sans accommoder.
On observe, à travers le microscope, un petit objet AB perpendiculaire à l'axe optique avec A et l'œil sur l'axe optique.

1. Rappeler la formule de conjugaison de Newton pour une lentille mince sphérique. Donner également les deux formules de Newton pour le grandissement γ.
2. Où doit être placé A pour que l'œil observe AB à travers le microscope sans accommoder ? Faire l'application numérique.

3. Les deux rayons sortant de la lentille (L_2) sur le dessin ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) sont issus de B. Dessiner leur trajet à travers le microscope et trouver ainsi graphiquement la position de AB.



4. Expression du grossissement :
   (a) Sous quel angle maximal θ_0 un œil normal voit-il AB sans le microscope ? (on prendra $\tan\theta_0 \simeq \theta_0$).
   (b) Sous quel angle θ l'œil voit-il AB à travers le microscope ? (on prendra $\tan\theta \simeq \theta$).
   (c) On définit le grossissement par $G = \frac{\theta}{\theta_0}$. Calculer G en fonction de Δ, d_m, f_1' et f_2'. Faire l'application numérique.
5. Le cercle oculaire de centre C est l'image de la monture de (L_1) à travers (L_2).
   (a) Que vaut $\overline{CF_2'}$.
   (b) Quel est le diamètre D' du cercle oculaire sachant que le diamètre de la monture de (L_1) est $D = 11$ mm ?
6. Comme la rétine est discontinue, granulaire, l'œil ne peut pas distinguer deux rayons lumineux l'un de l'autre s'ils font entre eux un angle inférieur à $\varepsilon = 1{,}5$ minute d'arc. Quelle est la taille du plus petit objet AB que l'on pourra distinguer ? On donnera son expression en fonction de Δ, ε, f_1' et f_2'. Faire l'application numérique.

1. Formules de conjugaison et de grandissement de Newton pour une lentille mince sphérique : si A' est le conjugué de A par une lentille de distance focale image f'.

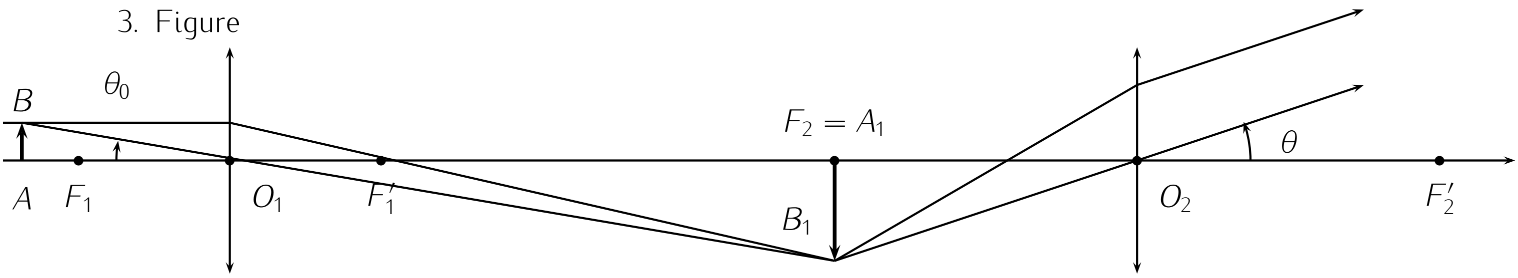
$$\overline{FA}.\overline{F'A'} = -f'^2 = -\overline{OF'}^2 \qquad \gamma = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

   Remarque : γ se retrouve rapidement à l'aide d'une figure.

2. Pour que l'œil observe AB à travers le microscope sans accommoder, il faut que l'image A_1B_1 de AB soit dans le plan focal objet de L_2 donc que $A_1 = F_2$ et en appliquant la relation précédente à L_1 avec F_2 le conjugué de A par L_1 :

$$\overline{F_1A}.\overline{F_1'F_2} = -f_1'^2 \iff \overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1F_2}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -\frac{4}{160} \simeq -0{,}025 \text{ mm } (A \simeq F_1.)$$

3. Figure



4. (a) Un œil normal voit AB sous un angle maximum s'il est à la distance minimale c'est à dire à d_m et $\tan\theta_0 = \frac{\overline{AB}}{d_m} \simeq \theta_0$

(b) À travers le microscope, on voit les rayons sortir sous un angle

$$\theta \simeq \tan\theta = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}\text{ , or }\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{F'_1A_1}}{\overline{OF'_1}} = -\frac{\Delta}{f'_1}\text{ et }\theta = \frac{\Delta\overline{AB}}{f'_2f'_1} \Rightarrow G = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{d_m\Delta}{f'_1f'_2} \simeq 667$$

5. Cercle oculaire.

(a) Par application de la formule de Newton au couple (O_1,C), conjugués par L_2 :

$$\overline{F_2O_1}.\overline{F'_2C} = -f'^2_2 \iff \overline{F'_2C} = \frac{-f'^2_2}{\overline{F_2F'_1}+\overline{F'_1O_1}} = \frac{-f'^2_2}{-\Delta - f'_1} \iff \overline{CF'_2} \simeq -5{,}56\text{ mm}$$

(b) Le cercle oculaire étant le conjugué de L_1 par L_2, on peut utiliser la formule du grandissement :

$$\frac{D'}{D} = |\gamma| = |-\frac{\overline{F'_2C}}{\overline{OF'_2}}| = \frac{f'_2}{\Delta + f'_1} \iff D' = \frac{f'_2}{\Delta + f'_1}D \simeq 2{,}04\text{ mm}$$

6. Le microscope permet d'augmenter l'angle que font deux rayons proches. On pourra distinguer l'objet AB à travers le microscope si l'angle

$$|\theta| = |G|.|\theta_0| > \varepsilon \iff \frac{\Delta\overline{AB}}{f'_2f'_1} > \varepsilon \iff AB > \frac{\varepsilon f'_1f'_2}{\Delta} \simeq 0{,}16\ \mu\text{m}$$

On obtient AB inférieur à la longueur d'onde de la lumière visible (0,4 à 0,8 μm) mais on est plus dans le domaine de l'optique géométrique et c'est la diffraction de la lumière à travers L_1 qui limitera la résolution du microscope.