Somme, appli, études de fonctions
DM 2

Exercice 1 (Etude de fonction - bijection) Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

1. **Partie 1 : Etude de f**
   a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Montrez que f est paire.
   c) Justifiez que f est dérivable sur son domaine de définition et calculer l'expression de sa dérivée.
   d) Établir le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
   e) Tracer la courbe représentative de f en faisant apparaitre explicitement les propriétés remarquées dans l'étude.
2. **Partie 2 : Bijectivité**
   a) Justifiez que f restreinte à $[0, +\infty[$ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans un intervalle à déterminer.
   b) Donner le tableau de variation de f^{-1}, complété par les limites. (indication : ne cherchez surtout pas à dériver...)
   c) Tracer la courbe de f^{-1}.
3. **Partie 3 : expression explicite de la réciproque**
   a) Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. On considère l'équation

   $$x^2 - \frac{1}{y}x + 1 = 0$$

   Justifiez que $1 - 4y^2 \geq 0$ et en déduire que cette équation admet deux solutions réelles, que l'on notera r_1 et r_2.
   b) Montrez que r_1 et r_2 sont positives, et que $r_1 r_2 = 1$.
   c) En déduire que la plus grande des deux solutions est nécessairement supérieur ou égale à 1.
   d) Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. Résoudre l'équation

   $$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y$$

   On pourra poser $X = e^x$.
   e) Déterminez f^{-1}.

---

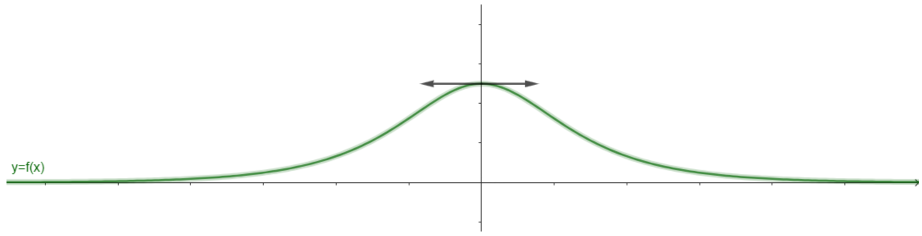
1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, d'où $e^x + e^{-x} > 0$ et donc $e^x + e^{-x} \neq 0$ Ainsi $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$
   b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{1}{e^{-x} + e^{-(-x)}} = \dfrac{1}{e^{-x} + e^x} = f(x)$.
   La fonction est bien paire.
   c) Par composition, somme et quotient de fonction dérivable f est dérivable et on a

   $$f'(x) = -(e^x - e^{-x})\frac{1}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$$

d) La dérivée est du signe de $e^{-x} - e^x$.
Or, $e^{-x} - e^x \geq 0 \Longleftrightarrow e^{-x} \geq e^x \Longleftrightarrow -x \geq x$ par strict croissance de ln.
Ainsi, $f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 0 \geq 2x \Longleftrightarrow x \leq 0$.
Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont évidentes (pas de forme indéterminées)
D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

e) L'étude précédente donne une asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$, d'équation $y = 0$ (c'est l'axe des abscisses) et une tangente en 0, horizontale, d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

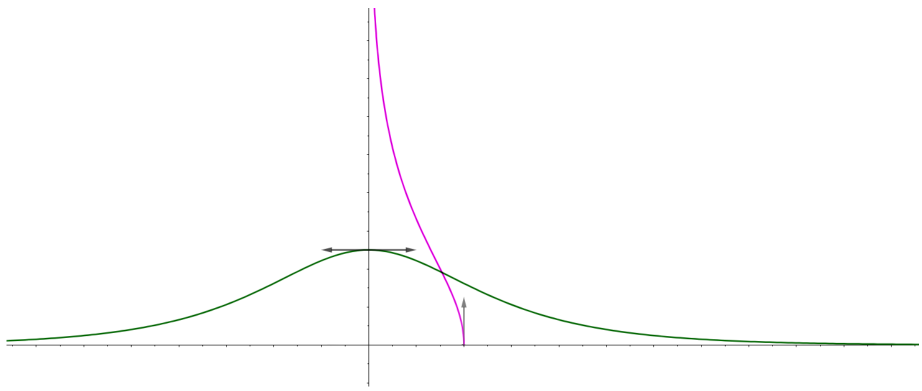


2. a) f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et est continue, donc f est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $f([0, +\infty[) =]0; \dfrac{1}{2}]$
(attention à ne pas se tromper sur les bornes : le 0 est exclu dans l'ensemble d'arrivée, puisque c'est une limite à l'infini. La valeur $\dfrac{1}{2}$ est incluse puisqu'elle est atteinte (c'est $f(0)$).)

b) f^{-1} est de même monotonie que f et on a donc

x	0		$\frac{1}{2}$
f^{-1}	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0

c) On commence par retracer la courbe de f, en notant la tangente horizontale en 0.
On effectue ensuite la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. La tangente horizontale se transforme alors en tangente verticale en $\dfrac{1}{2}$ (f^{-1} n'est donc pas dérivable en ce point....)
Avec en vert la courbe en f et en rose celle de f^{-1}, cela donne :



3. a) L'équation

$$x^2 - \frac{1}{y}x + 1 = 0$$

est une équation du second degré, avec un discriminant $\Delta = \frac{1}{y^2} - 4 = \frac{1-4y^2}{y^2}$

Comme $y \in]0, \frac{1}{2}]$, on a $0 < y^2 \leq \frac{1}{4}$, d'où $-1 \leq -4y^2 < 0$ et finalement $0 \leq 1 - 4y^2 \leq 1$.

Ainsi, $\Delta \geq 0$ et l'équation admet deux solutions, r_1 et r_2, confondues si $y = \frac{1}{2}$.

b) Comme $y > 0$, $\sqrt{y^2} = y$ et donc $\sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{1-4y^2}}{y}$

Ainsi, $r_1 = \frac{\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1-4y^2}}{y}}{2} = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$

A nouveau, étant donné que $y > 0$, r_1 est immédiatement positive ou nulle.
pour r_2, on sait que $0 \leq 1 - 4y^2 \leq 1$, donc $0 \leq \sqrt{1-4y^2} \leq 1$ et donc $1 - \sqrt{1-4y^2} \geq 0$.
Ainsi $r_2 \geq 0$ également.

Enfin r_1 et r_2 sont les deux racines du polynôme, donc $r_1 r_2 = \frac{1}{1} = 1$

version alternative : r_1 et r_2 sont racines du polynôme, donc $r_1 r_2 = 1 \geq 0$. Ainsi r_1 et r_2 sont de même signe. Comme r_2 est clairement positive, par somme et quotient de nombre positifs, r_1 l'est aussi.

version alternative 2 : r_1 et r_2 sont racines du polynôme, donc $r_1 r_2 = 1 \geq 0$. Ainsi r_1 et r_2 sont de même signe. De plus, $r_1 + r_2 = -\frac{\frac{-1}{y}}{1} = \frac{1}{y} > 0$, donc r_1 et r_2 ne sont pas négatif tous les deux. Ils sont donc tous deux positifs.

c) Supposons que les deux racines sont inférieures strict à 1.
On a alors $0 \leq r_1 < 1$ et $0 \leq r_2 < 1$, donc $r_1 r_2 < 1$, c'est à dire $1 < 1$: c'est absurde.
Ainsi l'une au moins des racines est supérieure à 1. L'autre est alors nécessairement plus petite que 1 : on peut faire une disjonction de cas :
si $r_1 \geq 1$, alors comme $r_2 \geq 0$, $r_1 r_2 \geq r_2$ donc $1 \geq r_2$: on aurait r_2 plus petit que 1.
Si c'est $r_2 \geq 1$, on obtient de la même façon $r_1 \leq 1$.
Dans tous les cas, l'une est plus grande que 1, l'autre plus petite.

d) Comme $y \neq 0$, on peut écrire :

$$\frac{1}{e^x + e^{-x}} = y \iff e^x + e^{-x} = \frac{1}{y}$$

Posons maintenant $X = e^x$. L'équation devient

$$X + \frac{1}{X} = \frac{1}{y} \iff \frac{X^2 + 1 - \frac{X}{y}}{X} = 0 \iff X^2 - \frac{1}{y}X + 1 = 0$$

On retrouve le polynôme de la question $3a$).
Ainsi $X = r_1$ ou $X = r_2$, c'est à dire $x = \ln(r_1)$ ou $x = \ln(r_2)$.

e) Soit $y \in]0, \frac{1}{2}]$. On cherche maintenant l'unique $x \geq 0$ tel que $f(x) = y$ (on sait qu'il n'y en a qu'un puisqu'on a montré que f était bijective sur $[0, +\infty[$.
Cela donne la même équation que la question d), avec cette fois $x \geq 0$, donc $e^x \geq 1$.
Il faut donc prendre la racine qui est supérieure à 1, qui est la plus grande des deux, Donc $e^x = r_1$ et finalement $x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y})$.

Ainsi,

$$\boxed{f^{-1} : \begin{array}{ll} \left]0, \frac{1}{2}\right] & \to [0, +\infty[\\ x & \mapsto \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right) \end{array}}$$

Exercice 2 Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

1. Déterminez deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+3}$$

2. En déduire la valeur de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

---

1. En mettant au même dénominateur, on obtient $\dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3} = \dfrac{(a+b)k + 3a + b}{(k+1)(k+3)}$

   Ainsi, pour avoir l'égalité $\dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k+3} = \dfrac{1}{(k+1)(k+3)}$ pour tout k, il suffit que $(a+b)k + 3a + b = 1$,

   c'est à dire $\begin{cases} a+b &= 0 \\ 3a+b &= 1 \end{cases}$

   D'où après résolution $\boxed{a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2}.}$

2. On va faire apparaître un télescopage :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+3} \right) \\ \text{en posant } j = k \text{ pour la 1ère somme, } j = k+2 \text{ pour la 2ème} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{j=2}^{n+2} \frac{1}{j+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j+1} - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \end{aligned}$$

   D'où

$$\boxed{S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{2(n+2)(n+3)}}$$

Exercice 3 Soit un entier $n \geq 1$. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminez les valeurs des sommes suivantes en fonction de n :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^{n-k} \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad S_4 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

La somme S_1 est directement sous la forme du binôme de Newton (avec $a = 2$ et $b = (-1)$), ainsi

$$\boxed{S_1 = (2-1)^n = 1}$$

En prenant $a = b = 1$ dans la formule du binome, on obtient S_2 :

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Ainsi, $\boxed{S_2 = 2^n}$.
Pour S_3, on obtient

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n$$

C'est à dire $\boxed{S_3 = 3^n}$.

Avec $a = -1$ et $b = 1$, on obtient

$$S_4 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1-1)^n$$

, donc $\boxed{S_4 = 0}$.