Devoir Surveillé n°2 - corrigé

Exercice 1 (Exercices de TD pour s'échauffer)

1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
   (a) Déterminez deux nombres réels A et B (fixés) tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$
   (b) En déduire S_n et $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
2. Soit la fonction f définie par
   $$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$
   Montrez que f est dérivable en 0 et précisez $f'(0)$.

La correction de ces deux exercices a été faite en TD.

Exercice 2 (Autour des coefficients binomiaux)

L'objectif de cet exercice est de calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Justifiez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. Justifiez que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
3. Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$ on a l'égalité : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
4. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$.
5. Montrez enfin que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

---

1. On a rencontré une telle somme en DM : c'est un binôme de Newton avec $a = b = 1$:
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$
2. Le terme pour $k = 0$ vaut 0 et peut donc être ignoré dans la somme. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.
3. Remarquons déjà que $k \geq 1$, donc $k-1 \geq 0$ et $(k-1)!$ a un sens. Il suffit maintenant de vérifier ce qui est demandé en calculant et en arrangeant les calculs pour que cela marche :
   $$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$
   D'autre part :
   $$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$
   D'où l'égalité.

   Conclusion : $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$.

   On peut également utiliser la formule du cours :
   $\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}$...

4. Il s'agit juste de remplacer avec la formule précédente et de factoriser par n.
5. Si on observe bien l'enchainement des questions, il semblerait qu'il faille montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

Or, avec un changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}$$

où on a posé $i = k-1$.
D'après la question 1 :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$$

Et donc finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n\sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}}$$

Exercice 3 (Dérivée géométrique)

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose d'obtenir de deux façons différentes la valeur de

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$$

1. **Partie 0 :**
   (a) Que vaut cette somme pour $x = 1$?
   (b) Justifiez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.
2. **Partie 1 : par dérivation** Soit $n \geq 0$ et soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

   (a) Déterminez l'ensemble de définition de f.
   (b) Justifiez que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculez $f'(x)$.
   (c) Justifiez que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = S_n(x)$ et en déduire la valeur de $S_n(x)$.
3. **Partie 2 : par telescopage**
4. (a) Pour tout $x \neq 1$, calculez et simplifiez au maximum $(x-1)S_n(x)$.
   Indication : On pourra développer la somme et jouer avec les indices.
   (b) En déduire $S_n(x)$ et retrouver l'expression obtenue en fin de partie 1.

Il y avait un bug d'énoncé dans l'exercice : il fallait $x \neq 0$, sinon on a un problème pour le premier terme, qui donne 0×0^{-1}... Pas sûr que beaucoup ont repéré ce problème, et vu la config de la salle, j'ai préféré ne pas le signaler....

1. **Partie 0 :**
   (a) Pour $x = 1$ on obtient $\boxed{S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$
   (b) Le terme pour $k = 0$ vaut 0, donc la somme peut commencer indifféremment en 0 ou 1.
2. **Partie 1 :**
   (a) $f(x)$ existe si et seulement si $1 - x \neq 0$, c'est à dire si $x \neq 1$. Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$

(b) Par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{1-x^n((n+1)(1-x)+x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2}$$

(c) Tout provient du fait que, comme $x \neq 1$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

On peut alors dériver chaque terme de la somme et utiliser la linéarité de la dérivation pour dire que :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$$

on a donc bien $\boxed{f'(x) = S_n(x)}$.

3. (a) On développe la formule proposée, en prenant pour S_n la version à partir de $k = 1$, et on simplifie :

$$(1-x)S_n(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kx^k$$

En effectuant le glissement d'indice $i = k-1$ dans la première somme, et en laissant la deuxième somme telle quelle, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1-x)S_n(x) &= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)x^i - \sum_{i=1}^{n} ix^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} ix^i - \sum_{i=1}^{n} ix^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x^i + 0 + \sum_{i=0}^{n-1} ix^i - \sum_{i=0}^{n-1} ix^i - nx^n \\
(1-x)S_n(x) &= \boxed{\frac{1-x^n}{1-x} - nx^n}
\end{aligned}$$

(b) Comme $x \neq 1$, on peut diviser et on obtient

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - n\frac{x^n}{1-x}}$$

A priori, le résultat est différent de la partie 1, mais en mettant au même dénominateur, on obtient :

$$S_n(x) = \frac{1-x^n-nx^n(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1-x^n(1+n-nx)}{(1-x)^2}$$

c'est bien le résultat obtenu en 1.

Exercice 4 (La fonction tangente hyperbolique)

On appelle "tangente hyperbolique" la fonction notée tanh, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier cette fonction, sa dérivée et sa bijection réciproque.

I) **Etude de tanh**

1. Etudier la parité de tanh.
2. Montrer que tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculez sa dérivée.
3. Donnez le tableau de variations de tanh et justifiez que $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
5. Tracer l'allure du graphe de tanh ainsi que ses asymptotes éventuelles et sa tangente à l'origine.

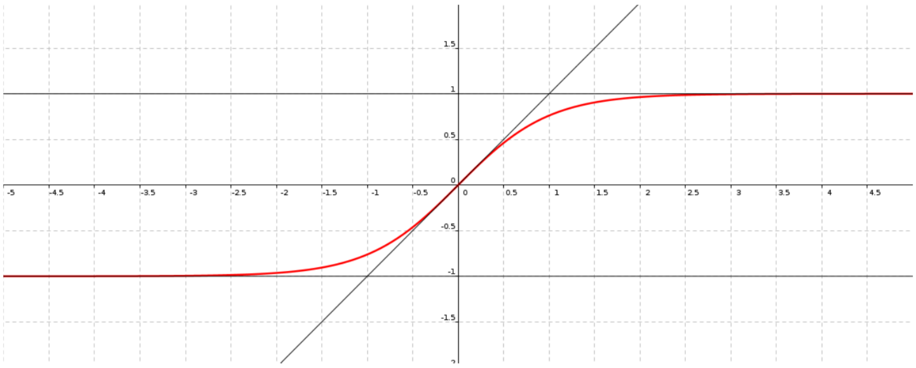
II) **Etude de la réciproque**

1. Montrer que tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à déterminer.
2. On appelle argth la bijection réciproque de tanh.
   (a) Sans calculer la dérivée, donner le tableau de variation de argth.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tanh'(x) = 1 - \big(\tanh(x)\big)^2$.
   (c) En déduire que argth est dérivable sur I et calculez $(\text{argth})'(x)$ pour tout $x \in I$.
3. Une particularité de tanh est que l'on peut en réalité calculer explicitement sa bijection réciproque :
   (a) Vérifier que, pour tout réel x, $\quad \tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
   (b) En déduire, en résolvant une équation, l'expression de $\text{argth}(y)$ en fonction de y, pour tout $y \in I$.
   (c) Justifier la dérivabilité et retrouvez le résultat obtenu à la question 2(c).

Partie 1 : Etude de tanh

1. La fonction est définie sur un ensemble symétrique ($\mathbb{R}$) et on a $\tanh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{e^x + e^{-x}}$, c'est à dire $\tanh(-x) = -\tanh(x)$. La fonction est donc impaire.
2. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$. La fonction est donc définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   Le calcul donne :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tanh'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}.$$
3. Le calcul de la dérivée donne $\tanh'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $\mathbb{R}$, donc
   $\boxed{\text{L'application tanh est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$
   Pour les limites, plusieurs techniques possibles. Factoriser par e^x marche très bien, mais on peut aussi écrire :
   $$\tanh(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^{-x}}{(e^x + e^{-x}) \times e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$
   et $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1}$
   Par ailleurs,
   $$\tanh(x) = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^{x}}{(e^x + e^{-x}) \times e^{x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$
   et $\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$, donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1}$
   Donc, la courbe $\mathcal{C}_{\tanh}$ a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ quand $x \to +\inf$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ quand $x \to -\infty$.
4. On a $\quad f'(0) = 1 \quad$ et $\quad f(0) = 0$, donc, d'après la formule donnant l'équation de la tangente,
   $\boxed{\text{la tangente à la courbe } \mathcal{C}_f \text{ en } (0;0) \text{ a pour équation } y = x.}$

5. Il s'agit de tracer 3 droites (deux asymptotes et une tangente).



La courbe ressemble un peu à arctan...

Partie 2 : Etude de argth

1. On sait que tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\tanh(\mathbb{R})$. De plus, tanh est continue et

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1.$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\tanh(\mathbb{R}) =]-1;1[$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'application tanh est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]-1;1[.}$

2. (a) On sait que la bijection réciproque est de même monotonie que la fonction de départ. D'où le tableau de argth :

x	-1		0		1
argth	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

le fait que $\operatorname{argth}(0) = 0$ n'était pas demandé, mais cela provient naturellement de $\tanh(0) = 0$.

(b) On sait que $\tanh'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$ et on calcule $1 - (\tanh(x))^2$ en mettant sous le même dénominateur : cela nous donne le même résultat.
Conclusion :
$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ \tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2.}$

(c) tanh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\tanh'(x) \neq 0$. Donc argth est dérivable sur $]-1;1[$ et pour tout $y \in]-1;1[$, on a

$$(\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{\tanh'(argth(x))} = \frac{1}{1 - \left[\tanh(\operatorname{argth}(x))\right]^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

car $\tanh(\operatorname{argth}(x)) = x$ pour tout $x \in]-1;1[$. En conclusion :

$$\boxed{\text{argth est dérivable sur }]-1;1[\text{ et, pour tout } x \in]-1;1[, \quad (\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

3. (a) Il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par e^x et on trouve la formule proposée.

(b) Soit $y \in]-1, 1[$ quelconque, fixé. Résolvons l'équation $\tanh(x) = y$ où $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\tanh(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = y \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 1 = y(e^{2x}+1) \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{2x}(1-y) = 1+y \\
&\Longleftrightarrow \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y \in]-1, 1[, \qquad \operatorname{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$$

Remarque : le fait que $y \in]-1;1[$ garantit que $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$, donc qu'on peut appliquer le logarithme.

(c) $y \longmapsto \dfrac{1+y}{1-y}$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et cette application est à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$
de plus $X \longmapsto \dfrac{1}{2}\ln(X)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc par composition : argth est dérivable sur $]-1, 1[$
De plus, par dérivation d'une fonction composée :

$$(\operatorname{argth})'(y) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1(1-y)-(1+y)(-1)}{(1-y)^2}}{\frac{1+y}{1-y}} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1-y)^2} \times \frac{1-y}{1+y}$$

Après simplification, on retrouve bien :

$$\boxed{\text{pour tout } y \in]-1;1[\,, \quad (\operatorname{argth})'(y) = \frac{1}{1-y^2}}$$

Exercice 5 (Si vous avez encore du temps !)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$

1. Justifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} \geq |x|$, puis que $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$
2. En déduire l'ensemble de définition de f.
3. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{1+x^2} + x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}$ et montrez que f est impaire.
4. Calculez $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
5. Justifiez la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et calculez $f'(x)$.
6. En déduire que f est une bijection dont on précisera l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

---

1. Comme $x^2 + 1 \geq x^2$, on a $\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$.
   De plus, $|x| \geq x$, donc $\sqrt{1+x^2} \geq x$, c'est à dire $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$
2. On a déjà que $\sqrt{1+x^2} - x \geq 0$, donc l'unique problème serait si cette expression vaut 0.
   Or, $\sqrt{1+x^2} - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x^2 \Rightarrow 1 + x^2 = x^2 \Rightarrow 1 = 0$: c'est absurde !
   Ainsi, l'argument du ln est toujours strictement positif et f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. On peut observer que $\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)\left(\sqrt{1+x^2} + x\right) = 1 + x^2 - x^2 = 1$, ce qui donne donc bien $\sqrt{1+x^2} - x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} + x}$
   De plus, $f(-x) = \ln(\sqrt{1+(-x)^2} + x) = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x}\right) = -\ln(\sqrt{1+x^2} - x) = -f(x)$, donc f est impaire.

4. En $-\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée, et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

   Par imparité, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

5. Par composition, somme et à nouveau composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur son ensemble de définition.

   On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \\ &= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

6. D'après le calcul précédent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante. Elle est elle constitue donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (au vue des limites obtenues en 4 et par continuité$+$ TVI).