3.2 Diffusion de particules-Exercice 1

Le coefficient de diffusion du sucre dans l'eau est noté D_S. Une solution sucrée possède, à l'instant t = 0, une concentration en sucre dépendant de l'abscisse x selon une loi de la forme :
$c(x, t = 0) = c_0 + c_1 \cos(2\pi x / \Lambda)$ où c_0, c_1 ($c_1 << c_0$) et Λ sont des constantes.
L'évolution ultérieure de la concentration est cherchée sous la forme : $c(x, t) = c_0 + f(t)\cos(2\pi x / \Lambda)$

a-Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la concentration c(x,t).

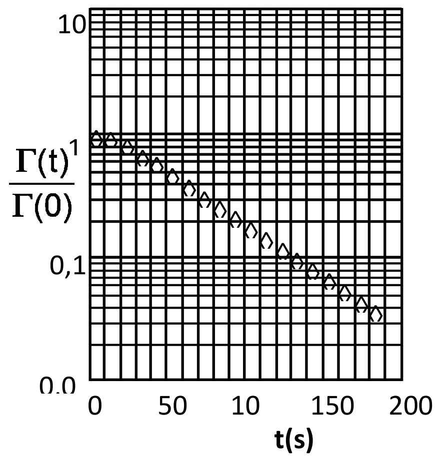
b-Déterminer, en fonction de D_S et Λ l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fonction f(t).
Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
Exprimer f(t) en fonction de c_1, t et d'un temps caractéristique τ_1 à écrire en fonction de D_S et Λ.
Quel sens concret donnez-vous au paramètre τ_1 ?

c-Représenter graphiquement, pour t > 0 donné, l'évolution de la concentration c(x,t) en fonction de x.
Tracer également la distribution limite $c(x,t\rightarrow\infty)$.

d-L'indice de réfraction de l'eau sucrée varie, aux faibles concentrations, selon une loi quasi linéaire :
$n = n_e + \beta c$, avec $n_e = 1,33$ et $\beta = 0,3.10^{-3}\ m^3.mol^{-1}$. Une cuve à faces parallèles, d'épaisseur d, est remplie d'une solution dont la concentration en sucre, à l'instant t = 0, varie de façon périodique avec une période spatiale Λ. Après une phase initiale, la concentration de sucre peut être décrite par la loi de la question c-.
Cette cuve est insérée dans un montage optique et l'éclairement observé sur l'écran à l'instant t peut s'écrire :
$\varepsilon = \varepsilon_0 [1 + (\xi c_1 d)\exp(-t / \tau_1)\cos(2\pi x / \Lambda)]$ où $\xi = 7,5.10^3\ m^2.mol^{-1}$. Qu'observe-t-on sur l'écran ?

e-En pratique, les franges sont visibles si leur contraste est supérieur à une valeur $\Gamma_{min} = 0,01$.
Pour une cuve d'épaisseur d donnée, exprimer la plus petite variation de concentration c_{min} décelable initialement, en fonction de Γ_{min}, ξ et d.
Calculer numériquement c_{min} en $mol.m^{-3}$ pour d = 1,0 mm.

f-La figure ci-contre représente le contraste normalisé, $\Gamma(t)/\Gamma(0)$, en fonction du temps (en secondes), obtenu pour une répartition initiale de période spatiale Λ = 1 mm.
Expliquer pourquoi les premiers points ne sont pas alignés avec les autres.
Déduire de ces résultats la valeur numérique du coefficient de diffusion D_S du sucre dans l'eau.



3.2 Diffusion de particules-Exercice 1

---

a-Bilan de particules à une dimension en géométrie cartésienne pour un volume Sdx compris entre x et x+dx :

$c(x,t+dt).Sdx = c(x,t)Sdx + j_{nx}(x,t)Sdt - j_{nx}(x+dx,t)Sdt$ d'où : $\frac{\partial c}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial j_{nx}}{\partial x}(x,t)=0$

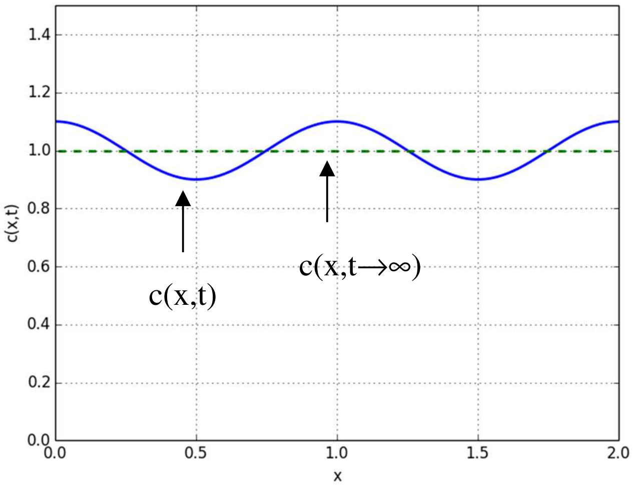
Avec la loi de Fick : $j_{nx} = -D_s \frac{\partial c}{\partial x}(x,t)$, on obtient : $\boxed{\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) = D_S \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x,t)}$

b-On reporte $c(x,t) = c_0 + f(t)\cos(2\pi x/\Lambda)$ dans l'équation de la diffusion :

$\frac{df}{dt}(t)\cos(2\pi x/\Lambda) = -\frac{4\pi^2}{\Lambda^2}D_S f(t)\cos(2\pi x/\Lambda)$ d'où : $\boxed{\frac{df}{dt}(t)+\frac{4\pi^2}{\Lambda^2}D_S f(t)=0}$

La solution est : $\boxed{f(t) = c_1\exp(-t/\tau_1)}$ avec $\boxed{\tau_1 = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2 D_S}}$ = temps caractéristique de diffusion

c-



d-L'éclairement dépend sinusoïdalement de x donc on observe des franges rectilignes x = cste.

e-Le contraste est : $\Gamma(t) = \xi c_1 d e^{-\frac{t}{\tau_1}}$.

Initialement : $\Gamma(0) = \xi c_1 d$. On veut $\Gamma(0) \geq \Gamma_{min} = 0{,}01$, d'où : $c_{min} = \frac{\Gamma_{min}}{\xi d} = \underline{1{,}3.10^{-3}\ mol.m^{-3}}$

f-Les premiers points ne sont pas alignés car ils correspondent à la phase initiale évoquée question d-

$\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} = e^{-\frac{t}{\tau_1}}$ => $\text{Ln}\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} = -\frac{t}{\tau_1}$ => $\log\frac{\Gamma(t)}{\Gamma(0)} = -\frac{t}{\tau_1 \text{Ln}10}$ droite de pente $-\frac{1}{\tau_1 \text{Ln}10}$

On lit sur la courbe une pente de : $\frac{\log(0{,}07)-\log(1)}{150-0} \approx -7{,}7.10^3$

Donc : $\frac{4\pi^2 D_S}{\Lambda^2} = 7{,}7.10^{-3}.\text{Ln}10$

D'où : $\underline{D_S = 4{,}5.10^{-10}\ m^2.s^{-1}}$
