DEVOIR SURVEILLÉ 2 16/10/24 Durée 4h

Exercice 1 : Suites de fonctions

Les questions 1 et 2 sont totalement indépendantes.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = n^\alpha x^n (1-x).$$

   (a) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction f_n sur $[0,1]$ et déterminer $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$.

   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{1}{\sin^2(x) + (1+x^2)^n}.$$

   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction u que l'on précisera.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

   (c) Soit $a > 0$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers u sur $[a, +\infty[$.

Exercice 2 : Normes sous-multiplicatives sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *sous-multiplicative* lorsqu'elle vérifie la propriété :

$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \ N(AB) \leqslant N(A)\,.\,N(B).$$

A. Un exemple de norme sous-multiplicative

Pour tout $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2}.$$

On admet que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on souhaite prouver qu'elle est sous-multiplicative.
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.
   En déduire que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2}$.
2. Montrer que $\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2\,.\,\|B\|_2$.

B. Étude de la norme subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$

On note $\|.\|_\infty$ la norme définie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ par :

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ \|X\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\quad M_A = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1. (a) Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\|AX\|_\infty \leqslant M_A\,\|X\|_\infty$.
   (b) En déduire que l'ensemble $\left\{\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \smallsetminus \{0_{n,1}\}\right\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
   On note dans la suite :
   $$|||A|||_\infty = \operatorname*{Sup}_{X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\smallsetminus\{0_{n,1}\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$
   (c) Montrer que : $|||A|||_\infty \leqslant M_A$.

2. Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$.

   En considérant le vecteur Y de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de cœfficients y_j définis par :

$$y_j = \frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \quad \text{et} \quad y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0,$$

   montrer que $M_A \leqslant |||A|||_\infty$ puis en déduire $|||A|||_\infty = M_A$.

C. Norme subordonnée à une norme quelconque

On désigne par $\|.\|$ une norme quelconque sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Justifier l'existence de deux réels strictement positifs C et D tels que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$C\,\|X\|_\infty \leqslant \|X\| \leqslant D\,\|X\|_\infty.$$

2. En déduire que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une constante réelle C_A telle que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant C_A\,\|X\|.$$

   Cela permet d'établir que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\} \right\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et on note dans la suite :

$$|||A||| = \operatorname*{Sup}_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

3. Soit $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer l'équivalence : $|||A||| = 0 \iff A = 0_n$.

   (b) Montrer que : $|||\lambda A||| = |\lambda| \,.\, |||A|||$.

   (c) Montrer que : $|||A + B||| \leqslant |||A||| + |||B|||$.

   (d) Montrer que : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ ||AX|| \leqslant |||A||| \,.\, ||X||$.

4. En déduire que $|||.|||$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   La norme $|||.|||$ est appelée *norme subordonnée à la norme* $\|.\|$.

5. Calculer $|||I_n|||$ et $\|I_n\|_2$ (où $\|.\|_2$ est la norme définie en partie A).
   La norme $\|.\|_2$ est-elle une norme subordonnée à une norme ?

Problème : Commutant d'une matrice

Notations et rappels

Soit n un entier naturel non nul.

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $[M]_{i,j}$ le cœfficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

Si $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ la matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont les cœfficients diagonaux sont $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}^{(n)}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf le cœfficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne qui vaut 1.
On rappelle que $(E_{i,j}^{(n)})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Polynômes matriciels

Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la suite des puissances de M par $M^0 = I_n$ et pour tout entier naturel k, $M^{k+1} = MM^k$.
Si $\Pi = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\Pi(M)$ la matrice $\sum_{k=0}^{d} a_k M^k$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit alors que $\Pi(M)$ est un polynôme matriciel en M.

Objectif du problème

On définit *le commmutant* C_A d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$C_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}.$$

Le but de ce problème est d'expliciter le commutant de certaines matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Les parties B.1, B.2 et C sont totalement indépendantes les unes des autres. Elles n'utilisent que des résultats de la partie A.

A. Propriétés générales

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si M et N appartiennent à C_A alors leur produit MN appartient à C_A.
3. En déduire que si M appartient à C_A alors pour tout $\Pi \in \mathbb{R}[X]$, $\Pi(M)$ appartient à C_A.

Dans les questions 4 et 5, on considère une matrice P inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $B = P^{-1}AP$.

4. Montrer que M appartient à C_B si et seulement si PMP^{-1} appartient à C_A.
5. On définit l'application Φ par

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} C_B & \longrightarrow & C_A \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array} \right.$$

   Montrer que Φ est un isomorphisme et préciser Φ^{-1}.

B. Étude de deux exemples dans le cas $n = 3$

1. Premier exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et expliciter une matrice P_1 inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P_1 D P_1^{-1}$.
2. Montrer qu'une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_D si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que
$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$
3. En déduire une base de C_D faisant intervenir certaines matrices $E_{i,j}^{(3)}$.
4. À l'aide de la question A.5, en déduire une base de C_A *(on exprimera ses éléments en fonction de matrices $E_{i,j}^{(3)}$ et de P_1, il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs).*

   Quelle est la dimension de C_A ?

2. Deuxième exemple

On considère la matrice $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ admettant G comme matrice dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
On rappelle que g^2 désigne l'endomorphisme $g \circ g$.

1. On pose $u = (1, -2, 4)$ $v = (1, 1, 1)$ et $w = (0, 1, 2)$.
   Montrer que $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de g dans cette base.
2. En déduire que les matrices G et $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables et donner une matrice P_2 inversible de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G = P_2 T P_2^{-1}$.
3. (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe.
   En déduire que $\dim\big(\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}\big(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)\big) \leqslant 3$.

   (b) Vérifier que u appartient à $\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et que v et w appartiennent à $\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

   (c) En déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et que $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition.

4. Dans cette question, M désigne une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ appartenant à C_T.
   On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui a pour matrice M dans la base $\mathscr{B}$.

   (a) Montrer que h et g commutent et en déduire que $\operatorname{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\operatorname{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont stables par h.
   (b) En déduire que la matrice M est de la forme :
   $$M = \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$
   (c) On note $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $XJ = JX$ et en déduire que $X \in \operatorname{Vect}(I_2, J)$.

5. En déduire qu'une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ appartient à C_T si et seulement s'il existe trois réels a, b et c tels que $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

6. En déduire une base de C_T, puis une base de C_G *(on exprimera ses éléments en fonction de matrices $E_{i,j}^{(3)}$ et de P_2, il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs).*

C. Commutant d'une matrice semblable à une matrice diagonale à cœfficients diagonaux tous distincts

Dans cette partie, A désigne une matrice réelle d'ordre n.

On suppose qu'il existe P matrice inversible d'ordre n et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, telles que :
$$A = PDP^{-1}.$$

1. Démontrer que pour tout polynôme Π de $\mathbb{R}[X]$,
$$\operatorname{diag}(\Pi(\lambda_1), \dots, \Pi(\lambda_n)) = \Pi(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)).$$

2. On note $L_1, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   Montrer que si $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ alors le polynôme $Q = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$ vérifie :
$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ Q(\lambda_j) = \mu_j.$$

3. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $[MD]_{i,j}$ et $[DM]_{i,j}$.
   (b) Démontrer que M appartient à C_D si et seulement s'il existe des réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ tels que $M = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

4. Soit N une matrice appartenant à C_A. On pose $M = P^{-1}NP$.
   (a) Démontrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $M = Q(D)$.
   (b) Montrer que pour tout $\Pi \in \mathbb{R}[X]$, $\Pi(PDP^{-1}) = P\Pi(D)P^{-1}$.
   (c) En déduire que $N = Q(A)$ puis comparer C_A et l'ensemble des polynômes matriciels en A.