CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

Exercice 1 : Suites de fonctions

1.(a) Soit $x \in [0,1]$.
Cas $x \in [0,1[$: Par croissances comparées, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha x^n = 0$ car $|x| < 1$ donc en multipliant par la constante $1-x$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
Cas $x = 1$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge simplement sur } [0,1] \text{ vers la fonction nulle } f : x \mapsto 0.}$$

1.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ (car c'est une fonction polynômiale) et on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$f_n'(x) = n^\alpha(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = n^\alpha x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

et $n^\alpha x^{n-1} > 0$ donc $f_n'(x)$ est du signe de $n-(n+1)x$.
Ainsi, f_n' est positive sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et négative sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$ (on a bien $0 < \frac{n}{n+1} < 1$).
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } f_n \text{ est croissante sur } [0, \tfrac{n}{n+1}] \text{ et décroissante sur } [\tfrac{n}{n+1}, 1].}$$

Ainsi, f_n admet un maximum sur $[0,1]$, atteint en $\dfrac{n}{n+1}$, qui vaut :

$$f_n(n) = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Comme f_n est positive sur $[0,1]$, on a $|f_n| = f_n$ d'où :

$$\boxed{\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.}$$

1.(c) La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} = 0$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{n^\alpha}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.
On a :

$$\frac{n^\alpha}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^\alpha}{n} = n^{\alpha-1}.$$

Par ailleurs, on a au voisinage de $+\infty$:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1+o(1))$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1}$ (par continuité de exp en -1).
Comme $e^{-1} \neq 0$, on a donc :

$$\|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\alpha-1}e^{-1}.$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[0,1]} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ e^{-1} & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$.
On en déduit l'équivalence :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0,1] \text{ si et seulement si } \alpha < 1.}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
Cas $x \neq 0$: $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+x^2)^n = +\infty$ (suite géométrique avec $1+x^2 > 1$) donc par ajout d'une constante, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sin^2(x) + (1+x^2)^n\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
Cas $x = 0$: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } u : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

2.(b) On sait que si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors c'est vers la fonction u.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{1}{n}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x_n) - u(x_n) = \dfrac{1}{\sin^2(\frac{1}{n}) + (1+\frac{1}{n^2})^n}$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin^2\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$ et au voisinage de $+\infty$:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{donc } n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n = 1$ (par continuité de exp en 0).
Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n(x_n) - u(x_n)) = 1 \neq 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}.}$$

1.(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [a, +\infty[$.
On a $0 \leqslant x \leqslant a$ donc $x^2 \leqslant a^2$ donc $0 \leqslant 1+x^2 \leqslant 1+a^2$ donc $(1+x^2)^n \leqslant (1+a^2)^n$.
De plus, $\sin^2(x) \geqslant 0$ d'où $\sin^2(x) + (1+x^2)^n \geqslant (1+a^2)^n > 0$.
On en déduit que :

$$|u_n(x) - u(x)| = u_n(x) \leqslant \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

Ainsi, $\dfrac{1}{(1+a^2)^n}$ est un majorant de l'ensemble $\{|u_n(x) - u(x)|, x \in [a,+\infty[\}$.
Comme $\|u_n - u\|_\infty^{[a,+\infty[}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(1+a^2)^n}.$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(1+a^2)^n} = 0$ (puisque $1+a^2 > 1$) donc par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty^{[a,+\infty[} = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \text{ converge uniformément vers } u \text{ sur } [a, +\infty[.}$$

Exercice 2 : Normes sous-multiplicatives sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$

(*à partir de CCP PC 2002*)

Notation : Si M est une matrice alors on note $[M]_{i,j}$ le cœfficient de M d'indice (i,j).

A.1. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, on a pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$|\langle X, Y\rangle| \leqslant \|X\|.\|Y\|$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. En appliquant ceci avec pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = a_{i,k}$ et $y_k = b_{k,j}$, on obtient :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2}.}$$

A.2. On a :

$$\|AB\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [AB]_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right)$$

par l'inégalité obtenue à la question précédente (par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$ et somme). Comme la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2$ ne dépend pas de j et $\displaystyle\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n b_{k,j}^2$ ne dépend pas de i, on en déduit :

$$\|AB\|_2^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n b_{k,j}^2\right) = \|A\|_2^2 \|B\|_2^2.$$

Par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$ et positivité de la norme, on en déduit que :

$$\boxed{\|AB\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2.}$$

B.1.(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a par inégalité triangulaire :

$$|[AX]_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \underbrace{|x_j|}_{\leqslant \|X\|_\infty} \leqslant \|X\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leqslant M_A \|X\|_\infty.$$

En appliquant ceci avec $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|AX\|_\infty = |[AX]_{i_0}|$, on obtient :

$$\boxed{\|AX\|_\infty \leqslant M_A \|X\|_\infty.}$$

B.1.(b) Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a $\|X\|_\infty > 0$ donc par la question précédente, $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant M_A$.

L'ensemble $\left\{\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}\ ,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\right\}$ est donc une partie non vide (car $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\} \neq \varnothing$) et majorée de $\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{\text{l'ensemble } \left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}\ ,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\right\} \text{ admet une borne supérieure dans } \mathbb{R}.}$$

B.1.(c) On a pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} \leqslant M_A$.

Ainsi, M_A est un majorant de l'ensemble $\left\{\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}\ ,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\right\}$ et $|||A|||_\infty$ est le plus petit majorant de cet ensemble.

On en déduit :

$$\boxed{|||A|||_\infty \leqslant M_A.}$$

B.2. On constate qu'on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $|y_j| = 1$. Ainsi, $\|Y\|_\infty = 1$.

De plus, on a $|[AY]_{i_0}| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} y_j\right|$.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

Si $a_{i_0,j} = 0$ alors $a_{i_0,j} y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$.

Si $a_{i_0,j} \neq 0$ alors $a_{i_0,j} y_j = \dfrac{a_{i_0,j}^2}{|a_{i_0,j}|} = |a_{i_0,j}|$.

Ainsi, $|[AY]_{i_0}| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$.

Comme de plus $|[AY]_{i_0}| \leqslant \|AY\|_\infty$, on en déduit que $M_A \leqslant \|AY\|_\infty = \dfrac{\|AY\|_\infty}{\|Y\|_\infty} \leqslant |||A|||_\infty$ (majorant).

Ainsi :

$$\boxed{M_A \leqslant |||A|||_\infty \text{ et donc avec 1.(c), on en déduit que } |||A|||_\infty = M_A.}$$

C.1. Comme $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, les deux normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|$ sont équivalentes.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } (C,D) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tels que } \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ C\|X\|_\infty \leqslant \|X\| \leqslant D\|X\|_\infty.}$$

C.2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a alors par la question B.1.(a) :

$$\|AX\| \leqslant D\|AX\|_\infty \leqslant DM_A\|X\|_\infty \leqslant DM_A\frac{1}{C}\|X\| = C_A\,\|X\| \ \text{ en posant }\ C_A = \frac{D}{C}M_A.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe une constante réelle } C_A \text{ telle que } \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant C_A\|X\|.}$$

C.3.(a) Si $A = 0_n$ alors pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $\|AX\| = 0$ d'où $|||A||| = 0$.

Si $|||A||| = 0$ alors $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a $0 \leqslant \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant |||A||| = 0$ donc $\|AX\| = 0$.

Comme $\|.\|$ est une norme, on en déduit que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, $AX = 0_{n,1}$.

En appliquant par exemple ceci aux vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on obtient que toutes les colonnes de A sont nulles d'où $A = 0_n$.

On a donc l'équivalence :

$$\boxed{|||A||| = 0 \Leftrightarrow A = 0_n.}$$

C.3.(b) On a :

$$|||\lambda A||| = \operatorname*{Sup}_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}} \frac{\|\lambda AX\|}{\|X\|} = \operatorname*{Sup}_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}} |\lambda|\frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

car $\|.\|$ est une norme.

Comme $|\lambda|$ est un réel positif (ne dépendant pas de X) et l'ensemble $\left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|}\ ,\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}\right\}$ est non vide, on obtient :

$$|||\lambda A||| = |\lambda| \operatorname*{Sup}_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

Ainsi :

$$\boxed{|||\lambda A||| = |\lambda|\,.|||A|||.}$$

C.3.(c) On a pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$ par inégalité triangulaire pour la norme $\|.\|$:

$$\frac{\|(A+B)X\|}{\|X\|} = \frac{\|AX+BX\|}{\|X\|} \leqslant \frac{\|AX\|}{\|X\|} + \frac{\|BX\|}{\|X\|} \leqslant |||A||| + |||B|||.$$

La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit :

$$\boxed{|||A+B||| \leqslant |||A||| + |||B|||.}$$

C.3.(d) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Si $X \neq 0_{n,1}$ alors $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leqslant |||A|||$ donc $\|AX\| \leqslant |||A|||.\|X\|$.
Si $X = 0_{n,1}$ alors les deux membres sont nuls.
Ainsi :

$$\boxed{\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant |||A|||.\|X\|.}$$

C.4. On déduit de 3.(a), 3.(b) et 3.(c) que $|||.|||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (elle est clairement à valeurs positives par positivité de la norme).
De plus, pour tout $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2$ et pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a par 3.(c) :

$$\frac{\|ABX\|}{\|X\|} \leqslant \frac{|||A|||.\|BX\|}{\|X\|} \leqslant \frac{|||A|||.|||B|||.\|X\|}{\|X\|} = |||A|||.|||B|||.$$

La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on en déduit : $|||AB||| \leqslant |||A|||.|||B|||$.
Ainsi :

$$\boxed{|||.|||\text{ est une norme sous-multiplicative sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

C.5. On a $|||I_n||| = 1$ car pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, on a $\dfrac{\|I_nX\|}{\|X\|} = 1$.
La somme des carrés des cœfficients de I_n est égale à n donc $\boxed{\|I_n\|_2 = \sqrt{n}}$.
Ainsi comme $n \geqslant 2$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la norme } \|.\|_2 \text{ n'est pas une norme subordonnée.}}$$

Problème : Commutant d'une matrice

(*Centrale TSI 2021*)

A. Propriétés générales

1. Par définition, on a $C_A \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A0_n = 0_n = 0_nA$ donc $0_n \in C_A$.
Montrons que C_A est stable par combinaison linéaire.
Soit $(M,N) \in C_A^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $\lambda M + N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA = (\lambda M + N)A$ donc $\lambda M + N \in C_A$.
On en déduit que :

$$\boxed{C_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2. On suppose que M et N appartiennent à C_A.
On a alors $MN \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A(MN) = (AM)N = (MA)N = M(AN) = M(NA) = (MN)A$.
On en déduit que $MN \in C_A$.
Ainsi :

$$\boxed{C_A \text{ est stable par produit matriciel.}}$$

3. On suppose que M appartient à C_A.
Montrons tout d'abord par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in C_A$.
Initialisation : Pour $k = 0$, on a $M^k = M^0 = I_n$ et $AI_n = A = I_nA$ donc $I_n \in C_A$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k \in C_A$.
Comme M et M^k sont deux matrices de C_A, leur produit M^{k+1} appartient à C_A d'après 2.
On en déduit par principe de récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in C_A$.

Soit maintenant $\Pi \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que Π s'écrit $\Pi = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (où $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$).
On a alors $\Pi(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k$.
Comme pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $M^k \in C_A$, $\Pi(M)$ est une combinaison linéaire d'éléments de C_A.
Comme C_A est stable par combinaison linéaire d'après 1., on en déduit que $\Pi(M)$ appartient à C_A.

$$\boxed{\text{Si } M \in C_A \text{ alors pour tout } \Pi \in \mathbb{R}[X],\ \Pi(M) \in C_A.}$$

4. Notons qu'en multipliant l'égalité $B = P^{-1}AP$ à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a $A = PBP^{-1}$.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $M \in C_B$. On a :

$$\begin{aligned} A(PMP^{-1}) &= (PBP^{-1})(PMP^{-1}) = PB(\underbrace{P^{-1}P}_{=I_n})MP^{-1} = P(BM)P^{-1} \\ &= P(MB)P^{-1} = (PMP^{-1})(PBP^{-1}) = (PMP^{-1})A. \end{aligned}$$

On en déduit que $PMP^{-1} \in C_A$.
$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $PMP^{-1} \in C_A$. On note $N = PMP^{-1}$ et on a alors $M = P^{-1}NP$.
On a :

$$\begin{aligned} BM &= (P^{-1}AP)(P^{-1}NP) = P^{-1}A(\underbrace{PP^{-1}}_{=I_n})NP = P^{-1}(AN)P \\ &= P^{-1}(NA)P = (P^{-1}NP)(P^{-1}AP) = MB. \end{aligned}$$

On en déduit que $M \in C_B$.

$$\boxed{M \in C_B \text{ si et seulement si } PMP^{-1} \in C_A.}$$

5. Notons que l'application Φ est bien définie car pour tout $M \in C_B$, $PMP^{-1} \in C_A$.
Montrons que l'application Φ est linéaire.
Soit $(M, N) \in C_B^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\Phi(\lambda M + N) = P(\lambda M + N)P^{-1} = (\lambda PM + PN)P^{-1} = \lambda PMP^{-1} + PNP^{-1} = \lambda\Phi(M) + \Phi(N).$$

Montrons que l'application Φ est bijective et déterminons Φ^{-1}.
On a l'équivalence :

$$N \in C_A \text{ et } N = PMP^{-1} \iff M \in C_B \text{ et } M = P^{-1}NP,$$

l'équivalence étant obtenue par la question précédente et par des produits à gauche et droite par des matrices inversibles.
Tout élément N de C_A admet donc un unique antécédent M dans C_B par Φ qui est $M = P^{-1}NP$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{l'application } \Phi \text{ est un isomorphisme et } \Phi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} C_A & \longrightarrow & C_B \\ N & \longmapsto & P^{-1}NP \end{array} \right.}$$

B. Étude de deux exemples dans le cas $n = 3$

1. Premier exemple

1. Notons φ_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A c'est-à-dire défini par :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}),\ \varphi_A(X) = AX.$$

Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On sait que φ_A a pour matrice A dans la base $\mathscr{C}$.
Déterminons une base $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\varphi_A) = D$.
Procédons par analyse-synthèse.
Analyse : Si une telle base $\mathscr{B}$ existe, par lecture sur la matrice D, on doit avoir les relations :

$$\begin{cases} \varphi_A(u_1) = 0_{3,1} \\ \varphi_A(u_2) = -u_2 \\ \varphi_A(u_3) = u_3 \end{cases} \iff \begin{cases} Au_1 = 0_{3,1} \\ (A + I_3)u_2 = 0_{3,1} \\ (A - I_3)u_3 = 0_{3,1}. \end{cases}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Résolvons les systèmes $AX = 0_{3,1}$, $(A + I_3)X = 0_{3,1}$ et $(A - I_3)X = 0_{3,1}$.

$$AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 0. \end{cases}$$

On peut donc choisir par exemple $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A + I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = x. \end{cases}$$

On peut donc choisir par exemple $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(A - I_3)X = 0_{3,1} \iff \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x. \end{cases}$$

On peut donc choisir par exemple $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Synthèse : On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$.

On a $\det_{\mathscr{C}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$ en développant par rapport à la deuxième ligne.
On en déduit que la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Par les calculs précédents, on a de plus $\begin{cases} \varphi_A(u_1) = 0_{3,1} \\ \varphi_A(u_2) = -u_2 \\ \varphi_A(u_3) = u_3 \end{cases}$ donc la matrice de φ_A dans la base $\mathscr{B}$ est D.

Comme les matrices A et D représentent un même endomorphisme dans deux bases, on en déduit que :

$$\boxed{\text{les matrices } A \text{ et } D \text{ sont semblables.}}$$

Par les relations de changement de bases, on a de plus :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(\varphi_A) = P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(\varphi_A)P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$$

ce qui donne :

$$\boxed{A = P_1 D P_1^{-1} \text{ où } P_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

2. Notons $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$.

$$M \in C_D \Leftrightarrow MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -m_{1,2} & m_{1,3} \\ 0 & -m_{2,2} & m_{2,3} \\ 0 & -m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -m_{2,1} & -m_{2,2} & -m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,1} = m_{3,1} = 0 \\ m_{2,3} = -m_{2,3} \\ m_{3,2} = -m_{3,2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, i \neq j,\ m_{i,j} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{M \in C_D \text{ si et seulement s'il existe trois réels } a,\ b \text{ et } c \text{ tels que } M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.}$$

3. D'après la question 2, $M \in C_D$ si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aE_{1,1}^{(3)} + bE_{2,2}^{(3)} + cE_{3,3}^{(3)}$.
Ainsi, la famille $(E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)})$ est une famille génératrice de C_D.
Elle est de plus libre car extraite d'une famille libre (puisque $(E_{i,j}^{(3)})_{1\leqslant i,j\leqslant 3}$ est une base de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } (E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)}) \text{ est une base de } C_D.}$$

4. On a $D = P_1^{-1} A P_1$.
D'après la question A.5, l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} C_D & \longrightarrow & C_A \\ M & \longmapsto & P_1 M P_1^{-1} \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
Comme $(E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)}, E_{3,3}^{(3)})$ est une base de C_D, on en déduit que $(\Phi(E_{1,1}^{(3)}), \Phi(E_{2,2}^{(3)}), \Phi(E_{3,3}^{(3)}))$ est une base de C_A.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } (P_1 E_{1,1}^{(3)} P_1^{-1}, P_1 E_{2,2}^{(3)} P_1^{-1}, P_1 E_{3,3}^{(3)} P_1^{-1}) \text{ est une base de } C_A.}$$

C'est une famille de cardinal 3 donc on en déduit que :

$$\boxed{C_A \text{ est de dimension } 3.}$$

2. Deuxième exemple

1. On a par l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ puis en développant par rapport à la première ligne :

$$\det_{\mathscr{C}}(u,v,w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 3 = 9 \neq 0.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{B} = (u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Déterminons la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.
On a $G\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\-8\end{pmatrix}$ donc $g(u)=(-2,4,-8)=-2u$.
On a $G\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $g(v)=(1,1,1)=v$.
On a $G\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ donc $g(w)=(1,2,3)=v+w$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice de } g \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est } T=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.}$$

2. Les matrices G et T représentent l'endomorphisme g dans les bases respectives $\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$ donc :

$$\boxed{\text{les matrices } G \text{ et } T \text{ sont semblables}}$$

et on a de plus par les relations de changement de bases :

$$\mathscr{M}at_{\mathscr{C}}(g)=P_{\mathscr{C},\mathscr{B}}\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(g)P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$$

ce qui donne :

$$\boxed{G=P_2TP_2^{-1} \text{ où } P_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&1&1\\4&1&2\end{pmatrix}.}$$

3.(a) Montrons que $\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont en somme directe.
Soit $x\in\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\cap\mathrm{Ker}\big(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)$.
Comme $x\in\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, on a $g(x)+2x=0_{\mathbb{R}^3}$.
Comme $x\in\mathrm{Ker}\big(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}\big)$, on a $g^2(x)-2g(x)+x=0_{\mathbb{R}^3}$.
On a donc $g(x)=-2x$ donc $g^2(x)=g(g(x))=g(-2x)=-2g(x)=-2(-2x)=4x$.
On en déduit que $g^2(x)-2g(x)+x=4x-2(-2x)+x=9x$ d'où $9x=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $x=0_{\mathbb{R}^3}$.
On a donc $\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\cap\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ et } \mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ sont en somme directe.}}$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\oplus\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension égale à $\dim\big(\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\dim\big(\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big)\leqslant\dim(\mathbb{R}^3)=3.}$$

3.(b) On a vu que $g(u)=-2u$, $g(v)=v$ et $g(w)=v+w$.
On a donc $(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(u)=g(u)+2u=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $\boxed{u\in\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$.
Comme $g^2(v)=g(g(v))=g(v)=v$, on a :

$$(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(v)=g^2(v)-2g(v)+v=v-2v+v=0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $\boxed{v\in\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$.
Comme $g^2(w)=g(g(w))=g(v+w)=g(v)+g(w)=v+v+w=2v+w$, on a :

$$(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(w)=g^2(w)-2g(w)+w=2v+w-2(v+w)+w=0_{\mathbb{R}^3}$$

donc $\boxed{w \in \mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})}$.

3.(c) Comme $\mathscr{B} = (u, v, w)$ est une famille libre (puisque c'est une base de $\mathbb{R}^3$), les familles (u) et (v, w) sont libres.
On en déduit que $\dim\big(\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) \geqslant 1$ et $\dim\big(\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) \geqslant 2$.
On a donc $\dim\big(\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) \geqslant 3$.
Comme on avait établi par ailleurs que $\dim\big(\mathrm{Ker}(g+2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big)+\dim\big(\mathrm{Ker}(g^2-2g+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) \leqslant 3$, on obtient :

$$\dim\big(\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Comme on avait établi en 3.(a) la somme directe, on en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).}$$

De ce qui précède, on déduit également que :
- $\dim\big(\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) = 1$ et (u) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ de cardinal 1 donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$,
- $\dim\big(\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})\big) = 2$ et (v, w) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ de cardinal 2 donc c'est une base de $\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{B} = (u, v, w) \text{ est une base adaptée à cette décomposition.}}$$

4.(a) Comme $M \in C_T$, on a $MT = TM$.
Or, M est le matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ et T est la matrice de g dans la base $\mathscr{B}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{les endomorphismes } h \text{ et } g \text{ commutent.}}$$

Comme g et h commutent, on a également :

$$(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ h = g \circ h + 2h = h \circ g + 2h = h \circ (g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$$

et :

$$(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ h = g^2 \circ h - 2g \circ h + h = g \circ h \circ g - 2h \circ g + h = h \circ g^2 - 2h \circ g + h = h \circ (g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}).$$

D'après le cours :
- comme $g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et h commutent, $\boxed{\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est stable par } h}$,
- comme $g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et h commutent, $\boxed{\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \text{ est stable par } h}$.

4.(b) On a établi que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, $\mathrm{Ker}(g + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Ker}(g^2 - 2g + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ sont stables par h et $\mathscr{B}$ est une base adaptée à cette décomposition.
Par le cours, on en déduit que la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$ est diagonale par blocs c'est-à-dire :

$$\boxed{M \text{ est de la forme } M = \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X \end{pmatrix} \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).}$$

4.(c) En faisant les calculs par blocs, on a :

$$MT = \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & I_2 + J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X(I_2 + J) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X + XJ \end{pmatrix}$$

et

$$TM = \begin{pmatrix} -2 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & I_2 + J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & (I_2 + J)X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & X + JX \end{pmatrix}.$$

Comme $TM = MT$, on en déduit que $X + XJ = X + JX$ d'où $\boxed{XJ = JX}$.

Notons $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

On a $XJ = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ et $JX = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\gamma = 0$ et $\alpha = \delta$ d'où $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I_2 + \beta J$.

Ainsi :

$$\boxed{X \in \mathrm{Vect}(I_2, J).}$$

5. Raisonnons par double implication.

Si M est une matrice de C_T alors d'après la question 4., il existe trois réels a, b et c tels que $M = \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & bI_2 + cJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Réciproquement, s'il existe trois réels a, b et c tels que $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & bI_2 + cJ \end{pmatrix}$ alors en faisant les calculs par blocs, on a :

$$MT = \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & bI_2 + cJ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & I_2 + J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & bI_2 + (b+c)J \end{pmatrix}$$

car $J^2 = 0_2$ et

$$TM = \begin{pmatrix} -2 & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & I_2 + J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & bI_2 + cJ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a & 0_{1,2} \\ 0_{2,1} & bI_2 + (b+c)J \end{pmatrix}.$$

On a $MT = TM$ donc $M \in C_T$.

Ainsi :

$$\boxed{M \in C_T \text{ si et seulement s'il existe trois réels } a, b \text{ et } c \text{ tels que } M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.}$$

6. D'après la question 5. :

$$M \in C_T \text{ si et seulement s'il existe } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } M = aE_{1,1}^{(3)} + b(E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}) + cE_{2,3}^{(3)}.$$

On en déduit que la famille $(E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}, E_{2,3}^{(3)})$ est une famille génératrice de C_T et elle est clairement libre (une combinaison linéaire nulle du type ci-dessus donne $a = b = c = 0$) donc :

$$\boxed{\text{la famille } (E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}, E_{2,3}^{(3)}) \text{ est une base de } C_T.}$$

Comme on a $G = P_2 T P_2^{-1}$, par la question A.5, l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} C_T & \longrightarrow & C_G \\ M & \longmapsto & P_2 M P_2^{-1} \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Comme $(E_{1,1}^{(3)}, E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}, E_{2,3}^{(3)})$ est une base de C_T, on en déduit que $(\Phi(E_{1,1}^{(3)}), \Phi(E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)}), \Phi(E_{2,3}^{(3)}))$ est une base de C_G.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la famille } (P_2 E_{1,1}^{(3)} P_2^{-1}, P_2(E_{2,2}^{(3)} + E_{3,3}^{(3)})P_2^{-1}, P_2 E_{2,3}^{(3)} P_2^{-1}) \text{ est une base de } C_G.}$$

C. Commutant d'une matrice semblable à une matrice diagonale à cœfficients diagonaux tous distincts

1. Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que Π s'écrit $\Pi = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\Pi(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)) &= \sum_{k=0}^{d} a_k (\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))^k \text{ (définition d'un polynôme matriciel)}\\
&= \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k) \text{ (puissances d'une matrice diagonale)}\\
&= \mathrm{diag}(\sum_{k=0}^{d} a_k\lambda_1^k,\dots,\sum_{k=0}^{d} a_k\lambda_n^k) \text{ (combinaison linéaire de matrices diagonales)}\\
&= \mathrm{diag}(\Pi(\lambda_1),\dots,\Pi(\lambda_n)).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout polynôme } \Pi \text{ de } \mathbb{R}[X],\ \mathrm{diag}(\Pi(\lambda_1),\dots,\Pi(\lambda_n)) = \Pi(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)).}$$

2. Soit $(\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$. Soit $j \in [\![1,n]\!]$.

On a par les propriétés connues sur les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$Q(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underbrace{L_i(\lambda_j)}_{0 \text{ si } i\neq j} = \mu_j \underbrace{L_j(\lambda_j)}_{=1} = \mu_j.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } j \in [\![1,n]\!], \text{ on a } Q(\lambda_j) = \mu_j.}$$

3.(a) On note $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On a :

$$[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k} \underbrace{d_{k,j}}_{=0 \text{ si } k\neq j} = m_{i,j}\lambda_j \text{ et } [DM]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{d_{i,k}}_{=0 \text{ si } k\neq i} m_{k,j} = \lambda_i m_{i,j}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [MD]_{i,j} = \lambda_j m_{i,j} \text{ et } [DM]_{i,j} = \lambda_i m_{i,j}.}$$

3.(b) On a :

$$\begin{aligned}
M \in C_D \Leftrightarrow MD = DM &\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [MD]_{i,j} = [DM]_{i,j} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \lambda_j m_{i,j} = \lambda_i m_{i,j}\\
&\Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ (\lambda_j - \lambda_i) m_{i,j} = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j,\ m_{i,j} = 0
\end{aligned}$$

car les $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont deux à deux disctincts.
On en déduit que $M \in C_D$ si et seulement si M est une matrice diagonale.

$$\boxed{M \in C_D \text{ si et seulement s'il existe des réels } \mu_1,\dots,\mu_n \text{ tels que } M = \mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n).}$$

4.(a) On a $D = P^{-1}AP$. Comme $N = PMP^{-1} \in C_A$, d'après la question A.4, on a $M \in C_D$.
Par la question précédente, on en déduit qu'il existe des réels $\mu_1,\dots,\mu_n$ tels que $M = \mathrm{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$.
On pose alors $Q = \sum_{i=1}^{n} \mu_i L_i$. D'après la question 2, on a alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\mu_j = Q(\lambda_j)$.
Ainsi, $M = \mathrm{diag}(Q(\lambda_1),\dots,Q(\lambda_n)) = Q(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))$ d'après la question 1.
On a ainsi trouvé :

$$\boxed{\text{un polynôme } Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } M = Q(D).}$$

4.(b) Soit $\Pi \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que Π s'écrit $\Pi = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$.

On a :

$$\Pi(PDP^{-1}) = \sum_{k=0}^{d} a_k (PDP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{d} a_k P D^k P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{d} a_k D^k\right)P^{-1} = P\Pi(D)P^{-1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \Pi \in \mathbb{R}[X],\ \Pi(PDP^{-1}) = P\Pi(D)P^{-1}.}$$

4.(c) On a donc par les questions précédentes :

$$N = PMP^{-1} = PQ(D)P^{-1} = Q(PDP^{-1}) \text{ d'où } \boxed{N = Q(A)}.$$

On vient donc de prouver que si $N \in C_A$ alors N est un polynôme matriciel en A.
Réciproquement, tout polynôme matriciel en A commute avec A (car on sait que d'après le cours que deux polynômes matriciels en A commutent).
On en déduit donc que :

$$\boxed{C_A \text{ est l'ensemble des polynômes matriciels en } A.}$$