

DEVOIR MAISON 3 - Compléments d'algèbre linéaire Corrigé

EXERCICE 1 (à partir de E3A MP 2009)

1.(a) Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A^{n-1} .

Comme $A^{n-1} \neq 0_n$, la matrice A^{n-1} a au moins une colonne non nulle.

Ainsi, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_{i_0} \neq 0_{n-1}$.

Soit u_0 le vecteur-colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice i_0 qui vaut 1.

On a alors $A^{n-1}u_0 = C_{i_0} \neq 0_{n,1}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } u_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ tel que } A^{n-1}u_0 \neq 0_{n,1}.}$$

1.(b) Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k u_0 = 0_{n,1}$.

On a $\alpha_0 u_0 + \alpha_1 A u_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}$ (1).

Rédaction 1 : En faisant le produit à gauche par A^{n-1} , on obtient :

$$\alpha_0 A^{n-1} u_0 + \alpha_1 A^n u_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{2(n-1)} u_0 = 0_{n,1}.$$

Or, on a pour tout $k \geq n$, $A^k = 0_n$ puisque $A^n = 0_n$.

On en déduit que $\alpha_0 A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}$ d'où $\alpha_0 = 0$ puisque $A^{n-1} u_0 \neq 0_{n,1}$.

(1) devient donc $\alpha_1 A u_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}$.

On réitère alors en faisant le produit à gauche par A^{n-2} , on obtient :

$$\alpha_1 A^{n-1} u_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{2n-3} u_0 = 0_{n,1}.$$

Comme pour tout $k \geq n$, $A^k = 0_n$, on obtient $\alpha_1 A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}$ d'où $\alpha_1 = 0$ puisque $A^{n-1} u_0 \neq 0_{n,1}$.

On continue ainsi jusqu'à obtenir la nullité de tous les coefficients $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-2} = 0$.

Il reste alors par (1), $\alpha_{n-1} A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}$ d'où $\alpha_{n-1} = 0$ puisque $A^{n-1} u_0 \neq 0_{n,1}$.

Tous les coefficients de la combinaison linéaire sont donc nuls.

On en déduit que la famille $(u_0, A u_0, \dots, A^{n-1} u_0)$ est libre.

Rédaction 2 : Raisonnons par l'absurde. On suppose qu'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha_k \neq 0$.

On note alors $\ell = \min\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k \neq 0\}$.

On a donc $\alpha_0 = \dots = \alpha_{\ell-1} = 0$ donc (1) s'écrit :

$$\alpha_\ell A^\ell u_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}.$$

En multipliant à gauche par $A^{n-1-\ell}$, on obtient :

$$\alpha_\ell A^{n-1} u_0 + \alpha_{\ell+1} A^n u_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{2(n-1)-\ell} u_0 = 0_{n,1}.$$

Or, on a pour tout $k \geq n$, $A^k = 0_n$ puisque $A^n = 0_n$.

On en déduit que $\alpha_\ell A^{n-1} u_0 = 0_{n,1}$ d'où $\alpha_\ell = 0$ puisque $A^{n-1} u_0 \neq 0_{n,1}$.

Ceci est absurde puisqu'on a supposé $\alpha_\ell \neq 0$.

On en déduit que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{B} = (u_0, A u_0, \dots, A^{n-1} u_0) \text{ est une famille libre de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).}$$

De plus, cette famille est de cardinal n et $\dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})) = n$ d'où :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).}$$

1.(c) On a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\varphi(A^k u_0) = A^{k+1} u_0$ et $\varphi(A^{n-1} u_0) = A^n u_0 = 0_{n,1}$.

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathcal{B} \text{ est la matrice } J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.(d) La matrice A est la matrice de l'endomorphisme φ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et la matrice J est la matrice de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$ d'après la question précédente. Comme A et J représentent le même endomorphisme dans deux bases, on en déduit que ce sont deux matrices semblables.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ telle que } A = PJP^{-1}.$$

Notons que par les formules de changement de base, on a cette relation avec $P = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$.

2. Comme A et J sont semblables, elles sont même trace et même déterminant.

Or, $\text{tr}(J) = \sum_{k=0}^n 0 = 0$ (somme des coefficients diagonaux) et $\det(J) = \prod_{k=1}^n 0 = 0$ (produit des coefficients diagonaux car il s'agit d'une matrice triangulaire inférieure).

Ainsi :

$$\boxed{\text{tr}(A) = 0 \text{ et } \det(A) = 0.}$$

On a $\text{tr} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = 2\text{tr}(A) = 0$ (somme des coefficients diagonaux) et $\det \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = (\det(A))^2 = 0$ (car il s'agit d'une matrice triangulaire par blocs avec des blocs diagonaux de taille carrée).

Ainsi :

$$\boxed{\text{tr} \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \det \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} = 0.}$$

3.(a) Soit D une matrice diagonale d'ordre n . Notons $d_1, \dots, d_n$ ses coefficients diagonaux.

$$\text{On a } DJ = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ d_2 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & d_3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n & 0 \end{pmatrix} \text{ et } JD = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ d_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & d_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, } DJ - JD = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ d_2 - d_1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & d_3 - d_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_n - d_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On en déduit que } DJ - JD = J \text{ si et seulement si } \begin{cases} d_2 - d_1 = 1 \\ d_3 - d_2 = 1 \\ \vdots \\ d_n - d_{n-1} = 1. \end{cases}$$

On constate que $(d_1, d_2, d_3, \dots, d_n) = (1, 2, 3, \dots, n)$ convient.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice diagonale } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \text{ vérifie } DJ - JD = J.}$$

3.(b) En multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient :

$$PDJP^{-1} - PJDP^{-1} = PJP^{-1}.$$

Comme $P^{-1}P = I_n$, on a alors $PDP^{-1}PJ P^{-1} - PJ P^{-1}PDP^{-1} = PJ P^{-1}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{en posant } H = PDP^{-1}, \text{ on a } HA - AH = A.}$$

3.(c) En effectuant le produit par blocs, on obtient :

$$\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A - HA \\ 0_n & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AH + A - HA \\ 0_n & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}.$$

$$3.(d) \text{ On a } \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & H - H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

On en déduit que la matrice $Q = \begin{pmatrix} I_n & -H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ est inversible et a pour inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & H \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$.

On a donc par la question précédente :

$$\begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{les matrices } \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix} \text{ sont semblables.}}$$

4.(a) La famille $\mathcal{B} = (u_0, Au_0, \dots, A^{n-1}u_0) = (\varphi^0(u_0), \varphi^1(u_0), \dots, \varphi^{n-1}(u_0))$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $\psi(u_0) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc $\psi(u_0)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \psi(u_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k(u_0).}$$

4.(b) Remarquons qu'on a par définition $P(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \varphi^k$ donc $\psi(u_0) = [P(\varphi)](u_0)$.

On a ainsi établi la formule souhaitée dans le cas où $\ell = 0$ (puisque $A^0 u_0 = I_n u_0 = u_0$).

Soit maintenant $\ell \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

On a :

$$\begin{aligned} \psi(A^\ell u_0) &= \psi(\varphi^\ell(u_0)) = \psi \circ \varphi^\ell(u_0) = \varphi^\ell \circ \psi(u_0) \quad \text{car } \varphi \text{ et } \psi \text{ commutent} \\ &= \varphi^\ell(\psi(u_0)) = \varphi^\ell([P(\varphi)](u_0)) = \varphi^\ell \circ [P(\varphi)](u_0) \\ &= [P(\varphi)] \circ \varphi^\ell(u_0) \quad \text{car } P(\varphi) \text{ et } \varphi^\ell \text{ commutent puisque ce sont deux polynômes en } \varphi \\ &= [P(\varphi)](\varphi^\ell(u_0)) = [P(\varphi)](A^\ell u_0). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\boxed{\text{pour tout } \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \psi(A^\ell u_0) = [P(\varphi)](A^\ell u_0).}$$

Ainsi, ψ et $P(\varphi)$ sont deux endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui coïncident sur tous les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ donc ils sont égaux.

On a donc :

$$\boxed{\psi = P(\varphi).}$$

4.(c) Dans les questions 4.(a) et (b), on a prouvé que si ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ qui commute avec φ alors c'est un polynôme en φ .

Réciproquement, tout polynôme en φ commute avec φ (d'après le cours).

On en déduit le résultat souhaité :

$$\boxed{\text{les seuls endomorphismes de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ qui commutent avec } \varphi \text{ sont les polynômes en } \varphi.}$$

EXERCICE 2 (à partir de E3A MP 2003)

1. On a $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \subset \text{Im}(u)$.

Par conséquent, $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) \leq \dim(\text{Im}(u))$ et $\dim(\text{Im}(u)) = \text{rg}(u) = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) \in \{0, 1\}.}$$

2. ▶ On suppose que $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) = 0$.

On a alors $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$ donc la somme de $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ est directe.

De plus, par le théorème du rang, on a $\dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E)$.

On en déduit que $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$.

▶ On suppose que $\dim(\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)) = 1$.

On a alors $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \subset \text{Im}(u)$ avec égalité des dimensions d'où $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.

Comme de plus $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u)$, on en déduit que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{on a } E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) \text{ ou } \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u).}$$

3.(a) On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$ c'est-à-dire pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

▶ Montrons que $\text{Im}(u)$ est stable par u .

Soit $x \in \text{Im}(u)$. On a clairement $u(x) \in \text{Im}(u)$.

Ainsi, $\text{Im}(u)$ est stable par u .

▶ Montrons que $\text{Ker}(u)$ est stable par u .

Soit $x \in \text{Ker}(u)$. On a ainsi $u(x) = 0_E$ et $0_E \in \text{Ker}(u)$ (car $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E) donc $u(x) \in \text{Ker}(u)$.

Ainsi, $\text{Ker}(u)$ est stable par u .

$$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels } \text{Im}(u) \text{ et } \text{Ker}(u) \text{ sont stables par } u.}$$

3.(b) On a $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ et les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par u .

Soit $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ avec (e_1) base de $\text{Im}(u)$ (composée d'un seul vecteur car $\text{rg}(u) = 1$) et $(e_2, \dots, e_n)$ base de $\text{Ker}(u)$.

D'après le cours, la matrice M de u dans la base $\mathcal{C}$ est une matrice diagonale par blocs c'est-à-dire :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & A \end{pmatrix}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

De plus, pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $e_j \in \text{Ker}(u)$ donc $u(e_j) = 0_E$ donc la j ème colonne de la matrice M est nulle. On en déduit que $A = 0_{n-1}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la matrice de } u \text{ dans la base } \mathcal{C} \text{ est de la forme } M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{C}.}$$

3.(c) On a $\text{tr}(u) = \text{tr}(M) = \alpha$.

De plus, $\alpha \neq 0$ car sinon on aurait $M = 0_n$ donc u serait l'endomorphisme nul, ce qui n'est pas le cas puisque u est de rang 1.

D'où :

$$\boxed{\text{si } E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) \text{ alors } \text{tr}(u) \neq 0.}$$

4.(a) Le vecteur e est non nul donc (e) est une famille libre de l'espace vectoriel de dimension finie E . Par le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E .

$$\boxed{\text{Il existe une base } \mathcal{B} \text{ de } E \text{ dont le premier vecteur est } e.}$$

4.(b) Notons $\mathcal{B} = (e, e_2, \dots, e_n)$.

Notons que (e) est une famille libre composée d'un vecteur de $\text{Im}(u)$ et $\dim(\text{Im}(u)) = 1$ donc (e) est une base de $\text{Im}(u)$.

On a $u(e) = 0_E$ puisque $e \in \text{Im}(u)$ et $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ donc $e \in \text{Ker}(u)$.

Pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $u(e_j) \in \text{Im}(u) = \text{Vect}(e)$ donc il existe $\alpha_j \in \mathbb{C}$ tel que $u(e_j) = \alpha_j e$.

On en déduit que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc $\text{tr}(u) = \text{tr}(N) = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{si } \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u) \text{ alors } \text{tr}(u) = 0.}$$

5. Si $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ alors $\text{tr}(u) \neq 0$ d'après la question 3.

Si $\text{tr}(u) \neq 0$ alors on ne peut pas avoir $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ car sinon, on aurait $\text{tr}(u) = 0$ d'après la question 4. Mais si on n'a pas $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ alors nécessairement $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ d'après la question 2.

Ainsi :

$$\boxed{E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u) \iff \text{tr}(u) \neq 0.}$$

EXERCICE 3

1. Notons $U_0 = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $U_k = \prod_{i=1}^k (X - x_i)$.

On constate que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, U_k est un polynôme de degré k avec $k \leq n-1$ donc la famille $\mathcal{B}''$ est bien une famille de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

Elle est constituée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts donc c'est une famille libre.

De plus, elle est de cardinal n avec $n = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X])$.

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{B}'' \text{ est une base de } \mathbb{K}_{n-1}[X].}$$

2.► Déterminons la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

On sait par le cours que pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(P) = \begin{pmatrix} P(x_1) \\ P(x_2) \\ \vdots \\ P(x_n) \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(X^k) = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$.

On en déduit que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a $\det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) = \det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}^\top) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = V(x_1, \dots, x_n).$

► Déterminons la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'' = (U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$.

On a pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\mathcal{M}at_{\mathcal{B}'}(U_k) = \begin{pmatrix} U_k(x_1) \\ U_k(x_2) \\ \vdots \\ U_k(x_n) \end{pmatrix}.$

On en déduit que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}''$ est la matrice :

$$P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_3 - x_1 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_1 & (x_n - x_1)(x_n - x_2) & \dots & (x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Comme c'est une matrice triangulaire inférieure, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux donc :

$$\det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

► Déterminons la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'' = (U_0, U_1, \dots, U_{n-1})$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, U_k est un polynôme unitaire de degré k donc il s'écrit :

$$U_k = X^k + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^{(k)} X^i \text{ avec } (\alpha_0^{(k)}, \dots, \alpha_{k-1}^{(k)}) \in \mathbb{K}^k \text{ donc } \mathcal{M}at_{\mathcal{B}}(U_k) = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(k)} \\ \vdots \\ \alpha_{k-1}^{(k)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ est une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous égaux à 1.

On a donc $\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}) = 1$ et donc $\det(P_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}) = \det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}^{-1}) = \frac{1}{\det(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''})} = 1$.

Ainsi :

$$\boxed{\det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) = V(x_1, \dots, x_n), \det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \text{ et } \det(P_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}) = 1.}$$

3. On sait que $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}$ donc :

$$\det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}) = \det(P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}) \det(P_{\mathcal{B}'', \mathcal{B}})$$

d'où :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).}$$