DEVOIR MAISON 4 - *Suites et séries de fonctions*

À rendre le lundi 4 novembre

Exercice 1 : Séries de fonctions

Les deux questions sont totalement indépendantes.

1. Pour tout entier naturel n, on définit sur $[1, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

   (a) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$.
   (b) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $[1, +\infty[$.
   (c) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$.

2. Pour tout réel x, on pose :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin(nx)}{3^n}.$$

   (a) Montrer que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Pour tout x réel, justifier l'écriture :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right)$$

   et en déduire une expression simple de $\varphi(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

Exercice 2 : Approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par une suite polynômiale

Les parties A et B sont indépendantes.

A. Approximation de la racine carrée

On définit par récurrence la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par :

$$P_0 = 0 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2).$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ \ \sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{P_n(x)}{2}\right).$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ \ 0 \leqslant P_n(x) \leqslant \sqrt{x}.$$

3. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $\big(P_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction à déterminer.
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad \sqrt{x} - P_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.$$
5. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto \sqrt{x}\left(1 - \dfrac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
   Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle et en déduire la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

B. Théorème de Stone-Weierstrass

On rappelle que $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial « k parmi n ».

1. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.

4. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn, \quad \text{pour une constante } C > 0 \text{ à préciser.}$$

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. On admet l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction polynomiale :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :
$$X = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k \in \{0,1,\dots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

5. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \text{où } \|f\|_\infty = \sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |f(y)|.$$
6. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$:
$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

On a démontré le théorème de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur $[0,1]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.