Devoir Maison n°5.
Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton

par trigonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On voit A comme une matrice complexe et on note $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de T et pour tout $k \in [\![1\,;n]\!], P_k = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$.

2. Donner l'expression de χ_u en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

3. Montrer que $\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1), (X - \lambda_1)(u)(x) = 0_E$.

4. Soit $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, on suppose $\mathcal{P}(k) : \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k), P_k(u)(x) = 0_E$.

- **a)** Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k), P_{k+1}(u)(x) = 0_E$.
- **b)** Montrer que $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{id})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
- **c)** En déduire que $P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_E$.
- **d)** En déduire $\mathcal{P}(k+1) : \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}), P_{k+1}(u)(x) = 0_E$.

5. En déduire que : $\chi_A(A) = 0$.

par les matrices compagnons

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (non nulle) et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.

- **a)** Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- **b)** Calculer le polynôme caractéristique de f.
- **c)** En déduire $\chi_f(f)(x)$.

2. Cas général. Soit $x \in E$ un vecteur non nul.

- **a)** Montrer qu'il existe un entier k supérieur à 1 tel que : $\mathcal{F} = (x, f(x), \dots, f^{k-1}(x))$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est stable par f.
- **b)** Déterminer la matrice de f dans une base bien choisie.
- **c)** Montrer que $\chi_f(f)(x) = 0$.

3. Conclure.