DL facultatif

Exercice 1 On rappelle que pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xy \neq 1$, on a

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$

où $k = 0$ si $xy < 1$, $k = 1$ si $xy > 1$ avec $x, y > 0$ et $k = -1$ si $xy > 1$ et $x, y < 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Comparez $\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
2. Simplifiez pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.
3. Déterminez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

Exercice 2 Soit $\theta \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$. On considère l'équation (E)

$$z^2 - 2pz + 1 = 0 \quad \text{où} \quad p = \sin(\theta) + i\cos(\theta),$$

et on note z_1 et z_2 ses racines.

1. Déterminez la forme trigonométrique de p.
2. Déterminez le module et un argument de $p^2 - 1$.
3. Déterminez une racine carrée de $p^2 - 1$ que l'on notera δ.
4. Déterminez le module et un argument de $z_1 - p$ et $z_2 - p$.
5. Montrez que
$$|z_1 - i| = |z_2 - i| \quad \text{et que} \quad \arg(z_1 + i) \equiv \arg(z_2 + i) \mod 2\pi.$$

Exercice 3 Déterminez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables en 0 avec $f'(0) \neq 0$ telles que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + f^2(x)}.$$