

## OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ET PHOTOGRAPHIE

**Rappels :** Pour un objet  $AB$  orthogonal à l'axe optique avec  $A$  sur l'axe optique, on note l'image  $A'B'$  par une lentille mince de centre  $O$ , de foyer objet  $F$  et image  $F'$  et de distance focale  $f' = \overline{OF'}$ . Les relations suivantes sont alors vérifiées :

- relations de conjugaison et formule du grandissement de Descartes (avec origine au sommet)

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

- relations de conjugaison et formule du grandissement de Newton (avec origines aux foyers)

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{FO} \cdot \overline{F'O} = -f'^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

On propose dans ce problème de modéliser un appareil photo par un système optique centré avec les trois éléments suivants :

- une lentille convergente  $\mathcal{L}$  pour l'objectif photographique, de distance focale image  $f'$  ;
- un diaphragme circulaire  $\mathcal{D}$  de diamètre variable  $d$ , accolé à la lentille (sur le schéma ci-dessous,  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{D}$  sont légèrement décalés pour être visibles, mais dans la pratique et pour les calculs, ils sont à la même position) ;
- un capteur  $\mathcal{C}$ , de forme rectangulaire et de dimension  $l \times d$ , composé de pixels de forme carrée et de côté  $\varepsilon$  (en photographie argentique, on parlerait de cercle de confusion : taille de la tache image après développement pour un objet parfaitement ponctuel).

La distance entre la lentille et le capteur peut-être modifiée par le photographe pour faire la mise au point. On notera  $x$  la mesure algébrique  $\overline{F'C}$  entre le foyer image et le capteur.

Le schéma de la modélisation est représenté sur la figure 1.

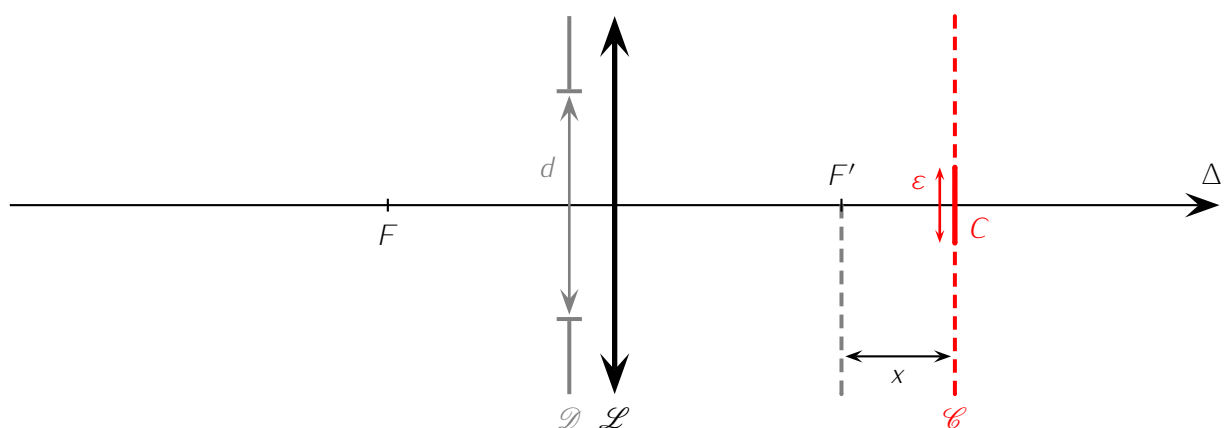


FIGURE 1 – Modélisation de l'appareil photo. Seul le pixel central est représenté.

### 1 Modélisation du système

- Q1 1. Que signifie l'expression « système optique centré » ?
- Q2 2. Qu'appelle-t-on rayons paraxiaux ou rayons dans les conditions de Gauss ?

- Q3 3. Quelle est l'utilité du diaphragme par rapport à la question précédente ?  
En photographie, on travaille avec des objets réels. On souhaite pouvoir faire la mise au point sur des objets situés par rapport à l'objectif à des distances allant de  $m = 30,0 \text{ cm}$  ( $m > f'$ ) jusqu'à l'infini.
- Q4 4. Pourquoi doit-on avoir  $m > f'$  ? Justifier.
- Q5 5. Quelles sont les valeurs extrêmes de la grandeur  $x$  pour pouvoir faire la mise au point sur toute la plage souhaitée ? Donner l'expression littérale en fonction de  $m$  et  $f'$  puis faire l'application numérique pour un objectif de distance focale  $18,0 \text{ mm}$ .

## 2 Distance hyperfocale

On se propose dans cette partie de calculer la distance hyperfocale, ou plus petite distance de mise au point pour laquelle on obtient une profondeur de champ infinie, c'est-à-dire pour laquelle la photographie est nette jusqu'à l'infini.

**Approximation simplificatrice :** pour simplifier les calculs, on considèrera l'approximation suivante qui est fréquemment utilisée en photographie :  $d \gg \varepsilon$ , alors on peut faire les approximations :  $\pm 1 + \frac{d}{\varepsilon} \simeq \frac{d}{\varepsilon}$  ou encore  $1 \pm \frac{\varepsilon}{d} \simeq 1$ .

**Nombre d'ouverture :** on rappelle qu'en photographie la taille du diaphragme est donnée sous la forme  $d = \frac{f'}{N.O.}$  avec  $N.O.$  le nombre d'ouverture.

- Q6 6. Montrer que pour un capteur d'appareil photographique ( $\varepsilon \simeq 20 \mu\text{m}$ ), un objectif de distance focale  $18,0 \text{ mm}$  ouvert à  $f'/18$ , l'approximation proposée ( $\varepsilon \ll d$ ) est justifiée et cause une erreur d'environ 2%.

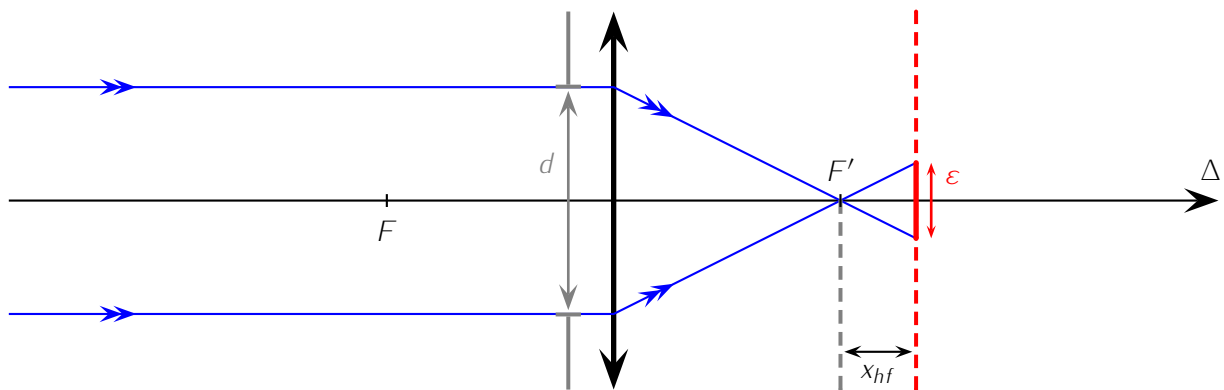


FIGURE 2 – Tracé de rayons parallèles à l'axe optique.

On considère la figure 2 où la mise au point n'est pas faite sur l'infini, mais où la lumière vient d'un objet ponctuel à l'infini sur l'axe optique.

- Q7 7. La photographie est-elle nette ou floue ?
- Q8 8. Comment change la netteté si on augmente ou si on diminue la taille du diaphragme ? On justifiera à l'aide de schémas.
- Q9 9. Comment change la netteté si on augmente ou si on diminue la distance  $x$  ? On justifiera à l'aide de schémas.
- Q10 10. Montrer à l'aide d'un schéma que pour un objet assez éloigné, mais non situé à l'infini, l'image obtenue avec le réglage de la figure 2 est nette.
- Q11 11. Dédire des questions précédentes que cette configuration correspond à la mise au point sur la distance hyperfocale pour cette taille de diaphragme.

- Q12 12. Déterminer par des considérations géométriques la distance  $x_{hf}$  correspondante.
- Q13 13. En déduire la distance hyperfocale  $h = OH = |\overline{OH}|$  entre l'objet sur lequel la mise au point est faite et la lentille (figure 3 ci-dessous). On utilisera l'approximation proposée pour simplifier le résultat en indiquant clairement où l'approximation est utilisée et on donnera la réponse en fonction de  $f'$ ,  $d$  et  $\varepsilon$ .  
Faire l'application numérique pour un objectif de distance focale 18,0 mm ouvert à  $f'/18$  avec le même capteur que précédemment.

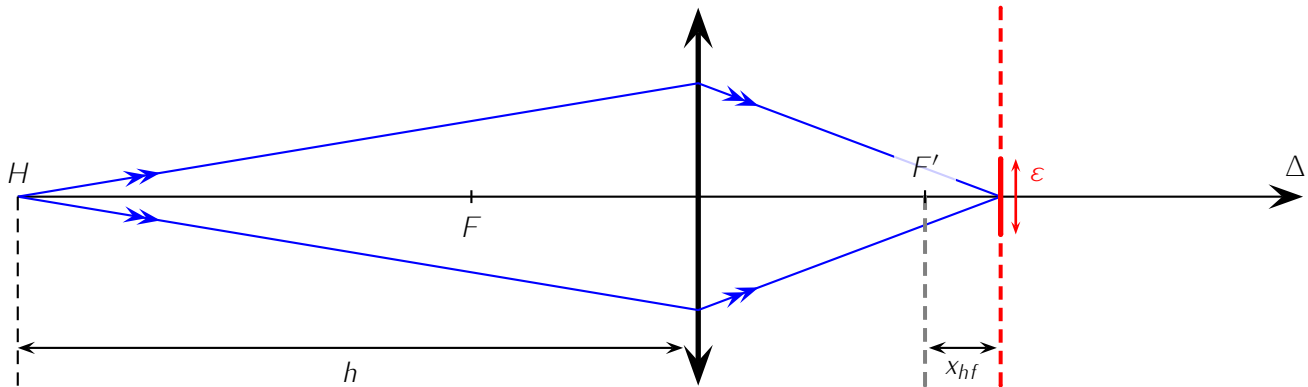


FIGURE 3 – Détermination de la distance hyperfocale.

En étant toujours réglé à l'hyperfocale, on cherche maintenant le point le plus proche pour lequel la photographie est nette.

On propose pour cela la figure 4 ci-dessous :

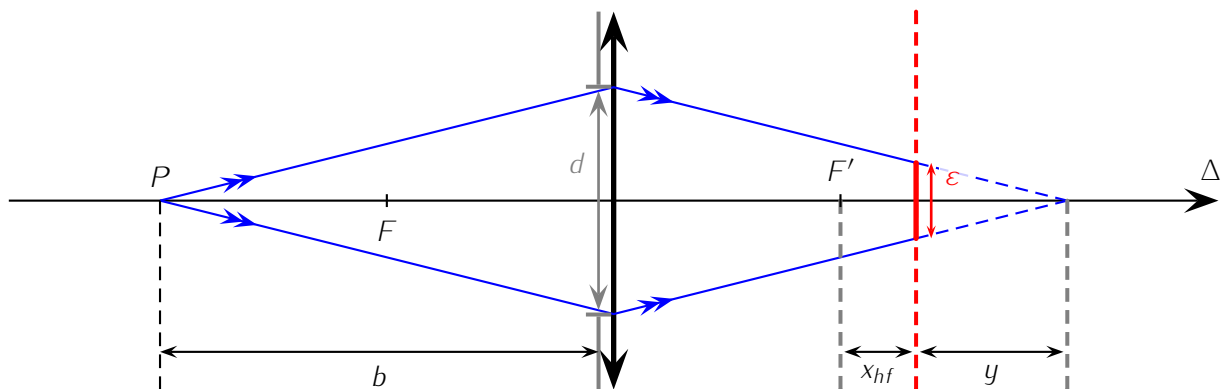


FIGURE 4 – Détermination du point le plus proche net.

- Q14 14. Par des considérations géométriques, exprimer  $y$  (défini sur le schéma figure 4), en fonction de  $x_{hf}$ ,  $\varepsilon$ ,  $d$  et  $f'$ . On simplifiera à nouveau le résultat en utilisant l'hypothèse  $d \gg \varepsilon$ .
- Q15 15. En déduire  $b$  la distance entre l'objet le plus proche qui sera net sur la photographie et l'objectif en fonction de  $d$ ,  $\varepsilon$  et  $f'$ . Faire l'application numérique et comparer à  $x_{hf}$ .

### 3 Étude d'un téléobjectif

Attention : Cette partie est indépendante. Dans ce qui suit, on ne prend plus en compte la profondeur de champ. De plus, les notations ne représentent plus les mêmes grandeurs (en particulier  $h$  ne représente plus la distance hyperfocale et  $d$  ne représente plus le diamètre du diaphragme).

Un téléobjectif est un objectif de longue focale, c'est-à-dire un objectif dont la focale est supérieure à la diagonale de la pellicule pour un appareil photographique argentique ou de la matrice de cellules photosensibles dans le cas d'un appareil photographique numérique.

Ces objectifs permettent un cadrage serré des sujets photographiés grâce à un angle de champ étroit.

Dans les trois parties suivantes, largement indépendantes, le sujet photographié est constitué par la tour Eiffel culminant à une hauteur  $h = 324$  m du sol et située à une distance  $d = 2,0$  km du photographe.

### 3.1 Objectif standard

On s'intéresse dans un premier temps à un objectif standard d'appareil photographique argentique constitué d'une lentille convergente unique de centre  $O$  et de focale  $f' = 50$  mm.

- Q16 1. Quelle doit être la distance  $D$  entre la lentille et la pellicule pour que la photographie soit nette ? Justifier votre réponse.
- Q17 2. Construire sur un schéma l'image de l'objet sur la pellicule (sans respecter l'échelle).
- Q18 3. On appelle  $h_1$  la hauteur de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule. Déterminer son expression en fonction de  $f'$ ,  $d$  et  $h$  puis calculer sa valeur numérique.

### 3.2 Réalisation d'un téléobjectif avec une lentille unique

- Q19 1. Expliquer pourquoi, si l'on souhaite photographier les détails d'un sujet lointain, il faut choisir un objectif de focale plus élevée que celle d'un objectif standard.
- Q20 2. Dans le cas d'un téléobjectif de focale  $f'_0 = 200$  mm, calculer la hauteur  $h_2$  de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule ainsi que l'encombrement de l'appareil (distance entre la lentille et la pellicule)

### 3.3 Réalisation d'un téléobjectif par association de deux lentilles distantes de $e$

Afin de raccourcir les téléobjectifs, en particulier les plus puissants, on peut réaliser un autre montage en associant deux lentilles distantes d'une distance  $e$  : une lentille convergente  $L_1$  de centre  $O_1$  et de focale  $f'_1$  et une lentille divergente  $L_2$  de centre  $O_2$  et de focale  $f'_2$ .

On prendra pour les applications numériques :  $f'_1 = 50$  mm,  $f'_2 = -25$  mm et  $e = O_1O_2 = 31$  mm.

On note  $P$  l'intersection du plan de la pellicule avec l'axe optique et  $F'$  l'image par le téléobjectif d'un point à l'infini sur l'axe optique.

- Q21 1. Déterminer littéralement la position de  $F'$  en fonction de  $f'_1$ ,  $f'_2$  et  $e$ . En déduire l'expression de l'encombrement  $O_1P$  de l'appareil en fonction de ces mêmes grandeurs. Après l'avoir calculé approximativement, déterminer laquelle de ces trois valeurs :  $O_1P = 14$  cm,  $O_1P = 11$  cm et  $O_1P = 8,0$  cm correspond à l'encombrement du téléobjectif.
- Q22 2. Déterminer l'expression de  $h_3$ , hauteur de l'image de la tour Eiffel sur la pellicule en fonction de  $f'_1$ ,  $f'_2$ ,  $e$ ,  $d$  et  $h$ . Après l'avoir calculée approximativement, déterminer laquelle de ces trois valeurs :  $h_3 = 14$  mm,  $h_3 = 34$  mm et  $h_3 = 54$  mm correspond à la hauteur de l'image sur la pellicule.
- Q23 3. Commenter les résultats précédents.

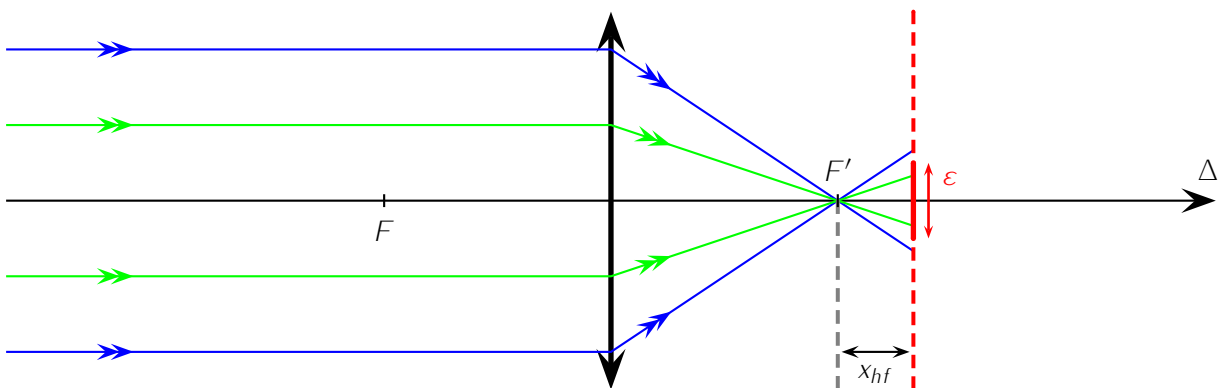
## OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE ET PHOTOGRAPHIE

### 3.4 Modélisation du système

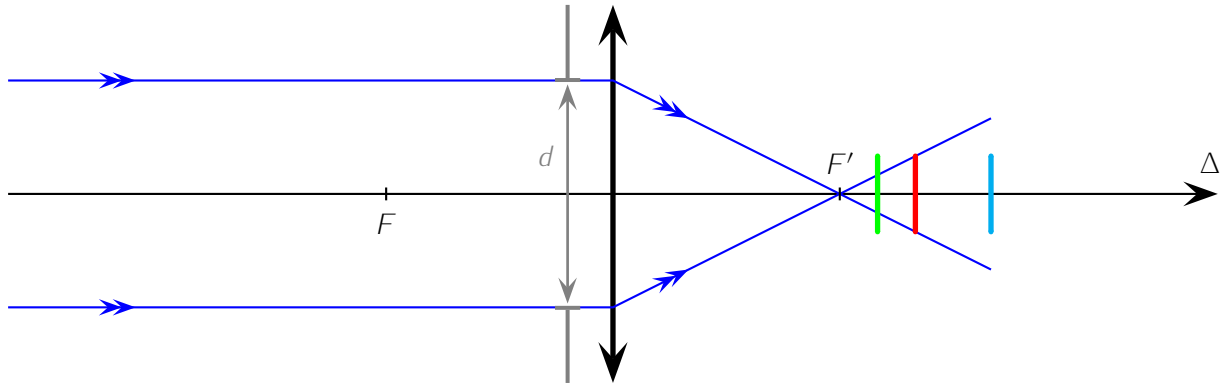
- Q24 1. « système optique centré » signifie que le système optique possède un axe de symétrie de révolution.
- Q25 2. Les rayons paraxiaux sont des rayons « peu inclinés par rapport à l'axe optique et peu écartés de l'axe optique », c'est-à-dire que leur angle par rapport à l'axe optique est faible et que leur point d'incidence sur la lentille est proche de l'axe optique.
- Q26 3. Le diaphragme permet d'empêcher un certain nombre de rayons non-paraxiaux de passer par la lentille (ceux qui frappe la lentille loin de l'axe optique), on se place ainsi dans les conditions de Gauss ce qui améliore la qualité de l'image.  
On doit absolument le placer accolé à la lentille pour qu'il empêche les rayons non-paraxiaux de passer par la lentille. Dans le cas contraire on laisse des rayons inclinés atteindre la lentille et on risque d'obtenir des phénomènes de distorsion.
- Q27 4. La condition  $m > f'$  est nécessaire pour pouvoir obtenir une image réelle d'un objet réel, voir par exemple les hyperboles de conjugaison ou la relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet :  $\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA} + f'}$ ,  $\overline{OA} < 0$  pour un objet réel,  $\overline{OA'} > 0$  pour une image réelle, d'où  $\overline{OA} + f' < 0$ , c'est-à-dire  $-m + f' < 0$  ou encore  $f' < m$ .
5. Considérons un objet  $A$  situé à une distance  $z$  (non algébrique). On cherche les valeurs possibles pour  $x$ , on a donc intérêt à utiliser la formule avec origine au foyer. La distance  $FA$  vaut donc  $|z - f'|$ . On en déduit  $\overline{FA} = -z + f'$  puisque les objets réels dont on peut faire une image réelle sont situés à gauche de  $F$ .  
On en déduit par application de la relation de conjugaison que  $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \Rightarrow (-z + f')x = -f'^2 \Rightarrow x = \frac{f'^2}{(z - f')}$ . La fonction étant monotone sur l'intervalle  $] -\infty, m]$ , on en déduit que les valeurs extrêmes de  $x$
- Q28 sont atteintes en  $z = m$  et  $z = \infty$  :  $x_m = \frac{f'^2}{(m - f')} = 1,15 \text{ mm}$  et  $x_\infty = 0$ .

### 3.5 Distance hyperfocale

- Q29 1. On a dans ce cas  $d = f'/18 = 1,0 \text{ mm}$ , soit  $\frac{d}{\epsilon} = 50$ . Ainsi négliger 1 devant 50 revient à faire une erreur relative de  $1/50 = 2\%$ .
- Q30 2. La photographie est nette, en effet un point à l'infini n'éclaire qu'un seul pixel, et on ne fera pas la différence avec le cas où la mise au point est réalisée sur l'infini.
- Q31 3. Si on augmente la taille du diaphragme, alors l'angle augmente et on va éclairer une zone plus grande que 1 pixel, la photographie deviendra flou. À l'inverse si on diminue la taille du diaphragme, l'angle entre les rayons après la lentille diminue et on n'éclaire qu'une partie du pixel, l'image reste nette.

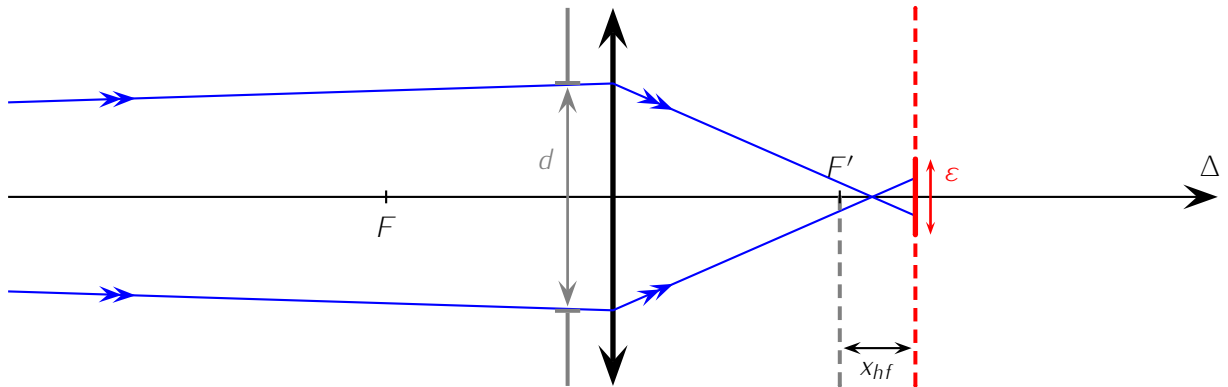


- Q32 4. Si on rapproche le capteur de la lentille ( $x$  diminue), alors la taille de la zone éclairée diminue, l'image reste nette. À l'inverse si on écarte le capteur ( $x$  augmente), alors la zone éclairée devient plus grande qu'un pixel et l'image devient floue.



5. Pour un objet loin mais non à l'infini, les rayons sont moins rabattus vers l'axe optique que pour un objet à l'infini et la tache sera donc de plus petite dimension que  $\epsilon$ , l'image est donc nette.

Q33



6. On en déduit que cette configuration « limite » est bien la plus grande distance  $x$  correspondant à une image nette d'un point à l'infini, donc la mise au point sur un objet le plus proche possible tout en gardant l'infini net.

La question précédente montre que les positions intermédiaires sont nettes aussi, ainsi qu'on a bien la netteté jusqu'à l'infini.

De plus, les questions précédentes nous montre que pour d'autres ouvertures du diaphragme, cette position ne correspond plus à la situation limite et on en déduit que la distance hyperfocale dépend de l'ouverture.

7. D'après le théorème de Thalès,  $\frac{x_{hf}}{\epsilon} = \frac{f'}{d}$  d'où  $x_{hf} = \frac{\epsilon f'}{d}$ .

8. On utilise la formule de Newton :  $\overline{FH} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2 \Leftrightarrow -(h - f')x_{hf} = -f'^2$ . On en déduit  $h = f' + \frac{f'^2}{x_{hf}}$

puis en utilisant l'expression précédemment trouvée  $h = f' + \frac{f'^2}{\frac{\epsilon f'}{d}} = f' \left(1 + \frac{d}{\epsilon}\right) \Rightarrow h \simeq f' \frac{d}{\epsilon}$ . On a utilisé l'approximation à la dernière étape.

Numériquement  $h = 18 \times 50 = 9,0 \times 10^2 \text{ mm}$  (918 mm sans approximation).

9. Le théorème de Thalès donne  $\frac{y}{\epsilon} = \frac{y + x_{hf} + f'}{d} \Rightarrow d \times y = \epsilon \times y + \epsilon(x_{hf} + f') \Rightarrow y = \frac{\epsilon(x_{hf} + f')}{d - \epsilon} \simeq \frac{\epsilon(x_{hf} + f')}{d}$

en utilisant l'approximation à la dernière étape.

10. Avec Newton encore une fois,  $\overline{FP} = \frac{-f'^2}{x_{hf} + y} = \frac{-f'^2}{\frac{\epsilon f'}{d} + \frac{\epsilon(f' + \frac{\epsilon f'}{d})}{d}} = \frac{-f'}{\frac{\epsilon}{d} + \frac{\epsilon(1 + \frac{\epsilon}{d})}{d}}$

Et enfin en utilisant  $1 + \frac{\epsilon}{d} \simeq 1$

$$\overline{FP} = \frac{-df'}{2\epsilon}$$

D'où  $b = f' + \frac{df'}{2\epsilon} = f' \left(1 + \frac{d}{2\epsilon}\right) \Rightarrow b \simeq f' \frac{d}{2\epsilon}$ . Soit la moitié de la distance hyperfocale.

Numériquement on trouve 450 mm (459 mm sans approximations).

Q38

### 3.6 Etude d'un téléobjectif

D'après Petites Mines 2009

#### 3.6.1 Objectif standard

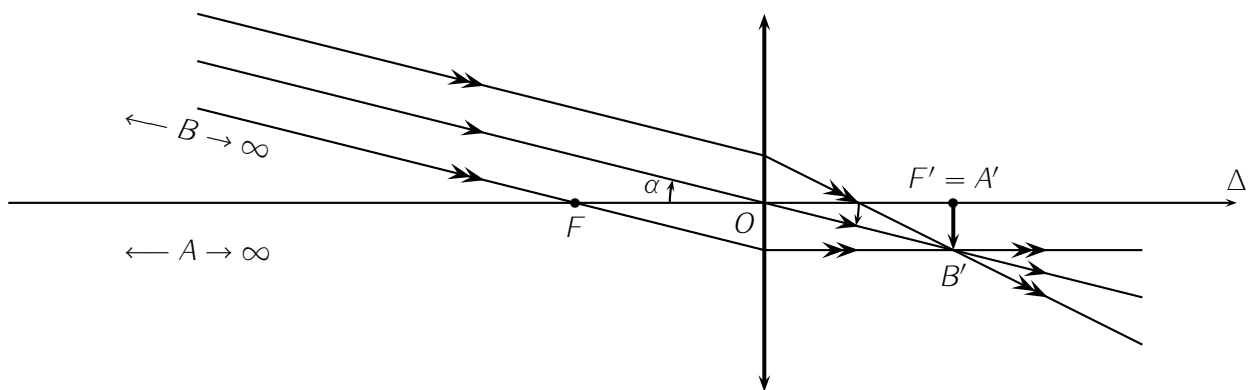
Constitué d'une lentille convergente unique de centre  $O$  et de focale  $f' = 50$  mm.

1. Comme la distance  $d$  qui sépare l'objet de la lentille est très grande devant la distance focale de la lentille, on peut considérer que l'objet est à l'infini.

Q39 Son image se forme donc dans le plan focal image de la lentille situé à la distance  $f'$  de cette dernière.

2. La lentille est considérée comme stigmatique, tous les rayons issus du sommet  $B$  de la tour Eiffel située très loin (à l'infini pour la lentille) convergeront en  $B'$  son image. On peut ainsi tracer des rayons parallèles provenant de  $B$  dont celui passant par  $O$ .

Q40



3. On remarque sur la figure que les triangles  $(OA'B')$  et  $(OAB)$  sont semblables (même angle  $\alpha$ ) d'où

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} = \tan \alpha \Rightarrow \frac{h}{-d} = \frac{-h_1}{f'} \Rightarrow h_1 = \frac{f'}{d}h = 8,1 \text{ mm}$$

Q41

L'image de la tour Eiffel sur la pellicule est donc inversée et de faible taille.

#### 3.6.2 Réalisation d'un téléobjectif avec une lentille unique

1. D'après l'expression trouvée à la question précédente, la taille de l'image d'un objet lointain et par conséquent le grandissement  $\gamma$  de l'objectif est proportionnel à  $f'$  la distance focale de l'objectif.

Q42

Il sera donc préférable d'utiliser un objectif à grande focale si on veut percevoir les détails d'un objet lointain.

2. Comme l'objet (tour Eiffel) est toujours considérée l'infini ( $d \ll f'_0$ ), son image se situe toujours dans le plan focal de la lentille d'où un encombrement  $\overline{OA'} = \overline{OF'} = f'_0 = 200$  mm.

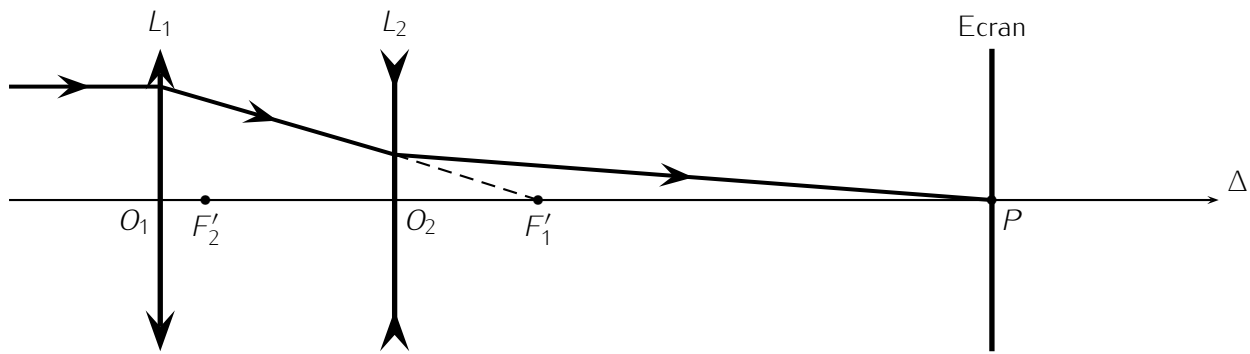
Q43

En reprenant directement l'expression obtenue lors de la partie A, on obtient cette fois

$$h_2 = \frac{f'_0}{d}h = \frac{f'_0}{f'}h_1 = 4h_1 = 32,4 \text{ mm.}$$

#### 3.6.3 Réalisation d'un téléobjectif par association de deux lentilles distantes de $e$

On utilise maintenant le système suivant :



1. Le point  $F'$  de l'axe optique est le foyer principal image du système, image d'un point  $A_\infty$  placé à l'infini sur l'axe optique.

On peut résumer cela sous la forme du tableau  $A_\infty \xrightarrow{L_1} F'_2 \xrightarrow{L_2} F'$  qui permet de comprendre que  $F'$  est simplement l'image de  $F'_2$  par la lentille  $L_2$ .

On peut alors en déduire la position de  $F'$  par application d'une relation de conjugaison (Newton par exemple).

$$\overline{F_2 F'_1} \cdot \overline{F'_2 F'} = -f_2'^2 \Rightarrow \overline{F'_2 F'} = \overline{F'_2 O_2} + \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{\overline{F_2 O_2} + \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 F'_1}}$$

$$\Rightarrow -f_2' - e + \overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{-f_2 - e + f_1'} \Rightarrow \boxed{\overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{f_2' - e + f_1'} + f_2' + e}$$

Si l'objet photographié est très loin (ce qui est le cas de la tour Eiffel), son image finale est dans le plan focal image du système. C'est à cet endroit qu'il faut placer la plaque photosensible  $P$  pour obtenir une image nette sur  $A' = F' = P$ .

Il faut finalement  $\boxed{\overline{O_1 P} = \overline{O_1 F'} = \frac{-f_2'^2}{f_2' - e + f_1'} + f_2' + e}$ .

L'application numérique donne une valeur très proche de 11 cm (la calculatrice n'était pas autorisée lors du concours), l'encombrement de l'appareil sera alors de  $\boxed{11 \text{ cm}}$ .

Remarques :

- On pouvait également appliquer la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_2 F'}} - \frac{1}{\overline{O_2 F'_1}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2 F'} = \frac{(f_1' - e) \cdot f_2'}{f_1' - e + f_2'}} \text{ puis } \overline{O_1 P} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F'} \simeq 11 \text{ cm.}$$

- Si l'objet à photographier n'est plus à l'infini son image recule et il faudra éloigner la plaque d'où un encombrement plus grand ou bien entendu un changement d'objectif (mode macro pour un objet très proche).

2. Par application des formules du grandissement pour une lentille  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$  avec  $AB$  l'objet et  $A'B'$  son image telle que, par application de la relation de conjugaison de Descartes,

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \cdot f'}{\overline{OA} + f'} \Rightarrow \gamma = \frac{f'}{\overline{OA} + f'}$$

Ici, comme on a un système de deux lentille, on doit appliquer la relation à  $L_1$  puis à  $L_2$ . En nommant  $A_1 B_1$  l'image de la tour Eiffel  $AB$  par  $L_1$  et  $A' B'$  celle de  $A_1 B_1$  par  $L_2$ , on peut écrire l'expression du grandissement  $\gamma$  du système sous la forme :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1 B_1}} \times \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \gamma_2 \cdot \gamma_1 = \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}} \times \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} = \frac{f_2'}{\overline{O_2 A_1} + f_2'} \cdot \frac{f_1'}{\overline{O_1 A} + f_1'}$$



Dans le cas présent, comme  $A$  est placé à l'infini,  $O_1A = d \gg f'_1$  d'où  $\overline{O_1A_1} + f'_1 \simeq \overline{O_1A_1} = -d$ .

Pour la même raison,  $A_1$  est confondu avec  $F'_1$  d'où  $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e + f'_1$ .

On en déduit

$$\overline{A'B'} = \gamma \cdot \overline{AB} = \frac{f'_1 f'_2}{(f'_1 - d)(f'_1 - e + f'_2)} \overline{AB} \Rightarrow h_3 \simeq \frac{|f'_1 \cdot f'_2| h}{d |f'_1 - e + f'_2|}$$

Q45

L'application numérique donne une valeur proche des 34 mm proposés.

3. Le système constitué des deux lentille permet finalement d'obtenir un grandissement aussi important équivalent qu'avec une lentille à grande focale (20 cm) mais avec un encombrement plus faible (11 cm au lieu de 20 cm).

Q46