Devoir Maison n° 2.
Pour le 16 septembre.

Chapitre 2 exercice 16

1. Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que : si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

2. Soit p un nombre premier.

a) Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis en déduire que p divise $\binom{p}{k}$.

b) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n\ [p]$.
Indication : procéder par récurrence.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, que : p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

Chapitre 1 exercice 11

Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On appelle radical de I :

$$\sqrt{I} = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}\,.$$

1. Soit $x \in \sqrt{I}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^n \in I$, montrer que : $\forall m \geqslant n, x^m \in I$.

2. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

3. Montrer que $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.

4. Soit J un idéal de A, montrer :

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \text{ et } \sqrt{I} + \sqrt{J} \subset \sqrt{I + J}.$$

5. Dans $\mathbb{Z}$, déterminer $\sqrt{3648\mathbb{Z}}$.