

Devoir Maison n° 3.

Pour le 23 septembre.

Chapitre 3 exercice 15

Exercice 1 (CCINP 60). Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Chapitre 3 exercice 17

Exercice 2 (CCINP 64).

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2. a) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2$.
b) Démontrer que : $\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.