Corrigé du DM 3

Chapitre 3 exercice 15

1. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a $f(M) = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix}$.

Alors $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists\,(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a &= -2c \\ b &= -2d \end{cases}$.

C'est-à-dire, $M \in \mathrm{Ker} f \iff \exists\,(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix}$.

On en déduit que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. (*)

On pose $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
D'après (*), la famille (M_1, M_2) est génératrice de $\mathrm{Ker} f$.
De plus, M_1 et M_2 sont non colinéaires ; donc (M_1, M_2) est libre.
Donc (M_1, M_2) est une base de $\mathrm{Ker} f$.

2. $\mathrm{Ker} f \neq \{0\}$, donc f est non injectif.
Or f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie.
On en déduit que f est non surjectif.

3. Par la formule du rang, $\mathrm{rg} f = 2$.
On pose $M_3 = f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M_4 = f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
M_3 et M_4 sont non colinéaires, donc (M_3, M_4) est une famille libre de $\mathrm{Im} f$.
Comme $\mathrm{rg} f = 2$, (M_3, M_4) est une base de $\mathrm{Im} f$.

4. On a $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$. (1)
Prouvons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

Soit $M \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$.
D'après 1. et 3., $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $M = aM_1 + bM_2$ et $M = cM_3 + dM_4$.
On a donc $\begin{cases} -2a &= c \\ -2b &= 2d \\ a &= 2c \\ b &= 4d \end{cases}$.
On en déduit que $a = b = c = d = 0$.
Donc $M = 0$.
Donc $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ (2)
Donc, d'après (1) et (2), $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Chapitre 3 exercice 17

1. Supposons $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
Indépendamment de l'hypothèse, on peut affirmer que $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ (*)
Montrons que $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$.

Soit $y \in \mathrm{Im} f$.
Alors, $\exists\, x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Or $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$, donc $\exists\,(a,b) \in E \times \mathrm{Ker} f$ tel que $x = f(a) + b$.
On a alors $y = f^2(a) \in \mathrm{Im} f^2$.
Ainsi $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ (**)
D'après (*) et (**), $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

2. a) On a $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$.
On en déduit que $\mathrm{Im} f^2 = \mathrm{Im} f \iff \mathrm{rg} f^2 = \mathrm{rg} f$ et $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2 \iff \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2$.
Alors, en utilisant le théorème du rang, $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} f = \mathrm{rg} f^2 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker} f = \dim \mathrm{Ker} f^2 \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.

b) Supposons $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
Soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f$.

$\exists\, a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0_E$.
On en déduit que $f^2(a) = 0_E$ c'est-à-dire $a \in \mathrm{Ker} f^2$.
Or, d'après l'hypothèse et 2.(a), $\mathrm{Ker} f^2 = \mathrm{Ker} f$ donc $a \in \mathrm{Ker} f$ c'est-à-dire $f(a) = 0_E$.
C'est-à-dire $x = 0$.
Ainsi $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0_E\}$. (***)
De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim E$. (****)

Donc, d'après (***) et (****), $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.