Corrigé du DM 4

Chapitre 4 exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On remarque que la somme des coefficients par ligne est 2.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ 0 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 1 \\ x-2 & x-1 & -1 \\ x-2 & -1 & x \end{vmatrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{(linéarité par rapport à la colonne 1)} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (x-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= x(x-1)(x-2).
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}.}$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
& X \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x + y - z = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; de même $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

remarque : pour $\mathrm{Ker}(A-2I_3)$, en remarquant que la somme sur les ligne donne 2, on a trouvé un vecteur propre : $(1,1,1)$ et comme 2 est une valeur propre d'ordre 1, on peut en déduire que $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sans avoir à résoudre de système.

De même, $\chi_B = (X-5)(X-2)^2$ donc $\mathrm{Sp}(B) = \{2, 5\}$ et $\mathrm{Ker}(B - 5I_3) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A - 2I_3) = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Chapitre 4 exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$.

Donc :

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} a+b+c \\ a+b+c \\ a+b+c \end{pmatrix} = (a+b+c)x_1$$

donc x_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre $(a+b+c)$.

$$Ax_2 = \begin{pmatrix} a+bj+cj^2 \\ aj+bj^2+c \\ aj^2+b+cj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bj+cj^2 \\ aj+bj^2+cj^3 \\ aj^2+bj^3+cj^4 \end{pmatrix} = (a+bj+cj^2)x_2$$

car $j^3 = 1$ et $j^4 = j$; donc x_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre $(a+bj+cj^2)$.

$$Ax_3 = \begin{pmatrix} a+bj^2+cj \\ aj^2+bj+c \\ aj+b+cj^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bj^2+cj \\ aj^2+bj^4+cj^3 \\ aj+bj^3+cj^2 \end{pmatrix} = (a+bj^2+cj)x_3$$

donc x_3 est un vecteur propre associé à la valeur propre $(a + bj^2 + cj)$.

De plus la matrice de la famille (x_1, x_2, x_3) a pour déterminant le déterminant de Vandermonde de la famille $(1, j, j^2)$ (car $j^4 = j$). Donc (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ constituée de vecteurs propres de A. Donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable, } \mathrm{Sp}(A) = \left\{a + b + c, a + bj + cj^2, a + bj^2 + cj\right\}.}$$

Remarque : la matrice A n'a pas nécessairement 3 valeurs propres disjointes (par exemple si $a = b = c = 1$), mais dans tous les cas (x_1, x_2, x_3) est une base de vecteurs propres.