Corrigé du DM 6

Chapitre 5 exercice 1 : Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer

1. On suppose A infini.
On construit une extractrice φ par récurrence :

- on pose $\varphi(0) = \min A$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) = \min(A \cap]\varphi(n) ; +\infty[)$.

Montrons que φ est bien définie :

- A est infini, donc non vide et c'est une partie de $\mathbb{N}$, donc A a un minimum ; d'où l'existence de $\varphi(0)$.
- soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n)$ existe, comme A est infini, A n'est pas inclus dans $[\![0 ; \varphi(n)]\!]$, donc $A \cap]\varphi(n) ; +\infty[$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, d'où l'existence de $\varphi(n+1)$.

Ainsi par principe de récurrence, φ est bien définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(n+1) > \varphi(n)$; donc φ est strictement croissante. Donc φ est une extractrice.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \in A$, donc $\varphi(n)$ a vue sur la mer, c'est à dire : $\forall k \geqslant n, u_k \leqslant u_n$, en particulier pour $k = \varphi(n+1) > \varphi(n)$, on obtient : $u_{\varphi(n+1)} \leqslant u_{\varphi(n)}$.

Donc :

$$\boxed{\text{il existe une suite extraite de } u \text{ qui est décroissante.}}$$

2. On suppose à présent que l'ensemble A est fini.
Donc A est borné, soit m un majorant de A.
On définit par récurrence la fonction extractrice φ :

- on pose : $\varphi(0) = m + 1 > m$;
- pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\varphi(n)$ défini avec $\varphi(n) > m$. Donc $\varphi(n)$ n'a pas vue sur la mer, donc il existe un entier $\varphi(n+1)$ tel que $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} > u_{\varphi(n)}$, on a donc nécessairement $\varphi(n+1) \neq \varphi(n)$ et $\varphi(n+1) > \varphi(n) > m$.

On a ainsi construit une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n+1)} > u_{\varphi(n)}$.
Donc :

$$\boxed{\text{il existe une suite extraite de } u \text{ qui est croissante (et même strictement croissante).}}$$

3. Pour une suite réelle bornée u,

premier cas : l'ensemble A associé à u est fini. Alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. De plus comme u est bornée, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

deuxième cas : l'ensemble A associé à u est infini. Alors il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. De plus comme u est bornée, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Donc, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Donc, dans tous les cas, la suite u a une valeur d'adhérence.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Toute suite réelle bornée a une valeur d'adhérence (théorème de Bolzano-Weierstrass).}}$$

Chapitre 5 exercice 4

Soit $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornées et

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge absolument} \right\}.$$

1.
- par définition de $\ell^1(\mathbb{K})$, pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{K})$, la série $\sum |u_n|$ converge ; donc N_1 est bien définie sur $\ell^1(\mathbb{K})$ et à valeurs positives.
- **séparation** : soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$ tel que $N_1(u) = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, 0\, |u_k| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0$, d'où $u = 0$.
- **homogénéité** : soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$N_1(\lambda u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda|\, N_1(u).$$
- **inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{K})$, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, donc par croissance et linéarité de la somme :
$$\begin{aligned} N_1(u+v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) \\ &\leqslant N_1(u) + N_2(u). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{N_1 \text{ est une norme sur } \ell^1(\mathbb{K}).}$$

2. Soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, |u_k| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = N_1(u).$$

Donc u est bornée. On a montré que :

$$\boxed{\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K}) \text{ et } \forall u \in \ell^1(\mathbb{K}), N_\infty(u) \leqslant N_1(u).}$$

Montrons que le normes ne sont pas équivalentes :
on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $u_n = (u_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, u_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite u_n est nulle à partir du rang n, donc $u_n \in \ell^1(\mathbb{K})$ et $N_1(u) = n$. Donc la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^1(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans l'espace vectoriel normé $(\ell^1(\mathbb{K}), N_1)$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}, N_\infty(u) = 1$, donc la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\ell^1(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace vectoriel normé $(\ell^1(\mathbb{K}), N_\infty)$.

$$\boxed{\text{Les normes } N_1 \text{ et } N_\infty \text{ ne sont pas équivalentes sur } \ell^1(\mathbb{K}).}$$