Chapitre 4 : Nombres complexes - Partie 1
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Déterminez les parties réelles et imaginaires des complexes suivants :

$$x = (1+i)^3 \quad y = \frac{1-4i}{1+5i} \quad z = \frac{1-4i}{1+5i} + \frac{1+4i}{1-5i} \quad v = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} \quad w = \frac{(1+i)^2}{1-i}$$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues z (et z') dans $\mathbb{C}$:

1. $z + 3iz = 4 + i - z$
2. $\dfrac{(1+i\sqrt{2})z+1}{i+3-z} = 3$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 + z - 1 = 0$
5. $4z^2 - 10z + 4 = 0$
6. $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$
7. $(1-i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$
8. $\begin{cases} z + z' & = 1 + 4i \\ z - z' & = 1 - 2i \end{cases}$

Exercice 3 :

Soient $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et $z \in U \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pure.

Exercice 4 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants :

$A = -50 \qquad B = 2i \qquad C = 8 - 6i \qquad D = 24 - 10i.$

Exercice 5 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0.$$

$$(2) \qquad z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0.$$

$$(3) \qquad z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$$

(*on chercherა une solution imaginaire pure*)

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{3z-i}{i+z}$.

1. (a) Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $f(z) \neq 3$.
   (b) Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de paramètre y :
   $$f(z) = y$$
   (c) En déduire que f est bijective et déterminez $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$.
2. (a) Déterminez l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $f(z) \in \mathbb{R}$. On pourra écrire que $z = x + iy$ avec x et y réel.
   (b) Même question avec l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)$ est un imaginaire pur.