Analyse - Chapitre 3

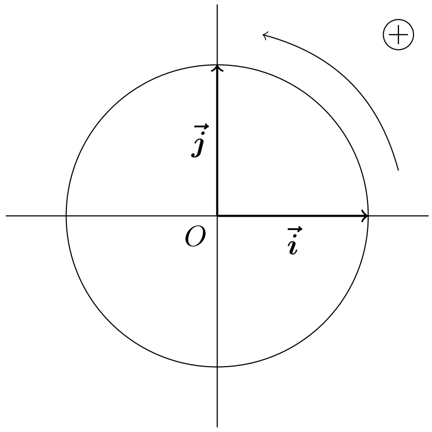
Rappels et compléments de trigonométrie

I Construction :

1) Cercle trigonométrique :

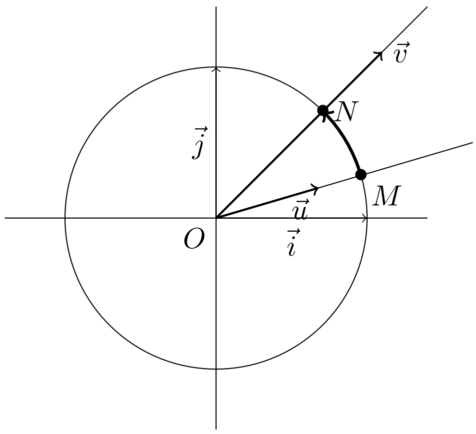
a) Angle orienté :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle cercle trigonométrique le cercle de rayon 1, de centre l'origine du repère, et orienté dans le sens $\vec{i}$ vers $\vec{j}$.



Définition : Angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Si on considère les demi droites d'origine O et dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, elles coupent le cercle en deux points : M et N.
On dit que la longueur de l'arc MN parcouru de M vers N dans le sens direct est une **mesure de l'angle** $(\vec{u}, \vec{v})$



b) Congruence

Définition :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$. On dit que x est **congru à** y **modulo** a et on note $x \equiv y\ [a]$ si et seulement si $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = y + ka$

Exemples :

- $4 \equiv 0\ [2]$
- $3 \equiv \qquad [2]$
- $13 \equiv 9\ [\qquad]$
- $\dfrac{7\pi}{2} \equiv \qquad [2\pi]$

Propriété 1 :
La relation de congruence est symétrique :

$$x \equiv y\ [a] \Leftrightarrow y \equiv x\ [a]$$

▷ *Preuve* :

◁

De la même manière, on montre aisément les relations suivantes :

Propriété 2 :
Soit x, y, z, t des réels et $a \in \mathbb{R}_+^*$.

- si $x \equiv y\ [a]$ alors $x + z \equiv y + z\ [a]$
- si $x \equiv y\ [a]$ et $z \equiv z\ [a]$ alors $x + a \equiv y + b\ [a]$

c) Applications aux angles :

Si, en mesurant un angle $(\vec{u}, \vec{v})$ on fait un tour de plus sur le cercle, donc si on ajoute 2π à la longueur de l'arc, on retombe sur les mêmes points d'intersection. Ainsi :

Proposition 1 :
x et y mesurent un même angle si et seulement si $x \equiv y\ [2\pi]$.

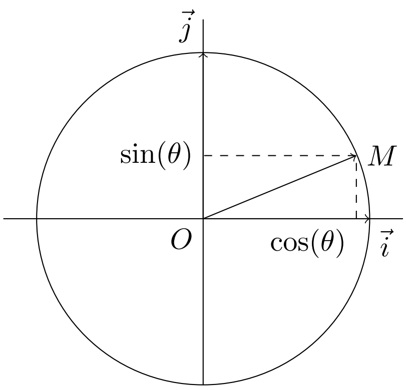
x et y désignent le même angle, mais on n'a pas $x = y$!

Définition :
On appelle **mesure principale** d'un angle l'unique mesure qui est dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$

2) Fonctions trigonométriques :

a) cosinus et sinus :

Définition :
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et M l'unique point sur le cercle tel que θ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
On appelle alors $\cos(\theta)$ l'abscisse de M, $\sin(\theta)$ son ordonnée.



Comme pour tout réel θ, θ et $\theta + 2\pi$ sont des mesures du même angle, on a

Propriété 3 :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$

Enfin, comme $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées d'un point sur le cercle trigonométrique, elles sont comprises entre -1 et 1.
Or, un point M est sur le cercle si et seulement si $OM = 1$.
En notant (x, y) les coordonnées de ce point, on a donc $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, et on obtient ainsi la relation :

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ appartient au cercle } \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Appliquée à nos fonctions trigonométriques, cela donne :

Propriété 4 :
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

et

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

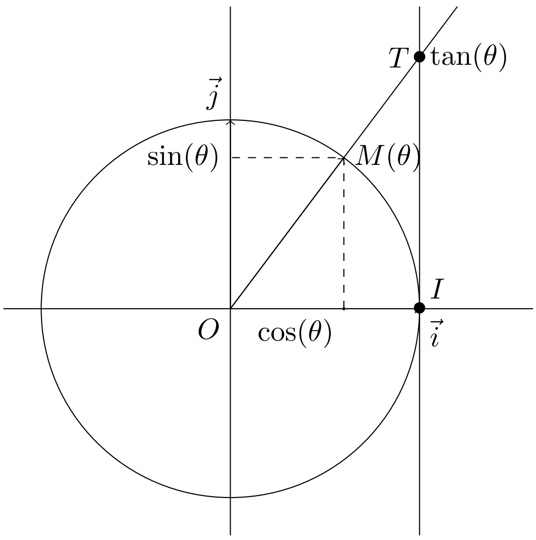
b) Tangente :

Définition :

Pour tout réel θ de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\right\}$, on appelle **tangente** de θ la quantité

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

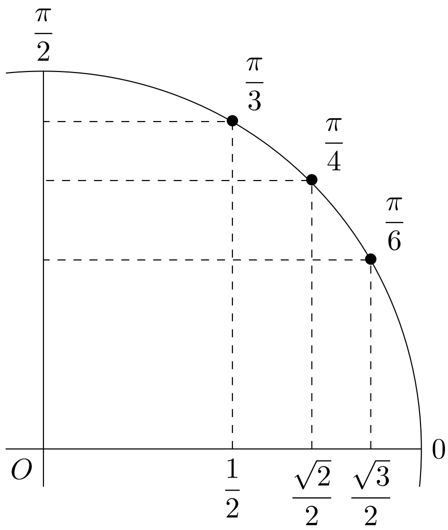
Interprétation graphique :



On peut justifier ce dessin avec l'équation de la droite OM :

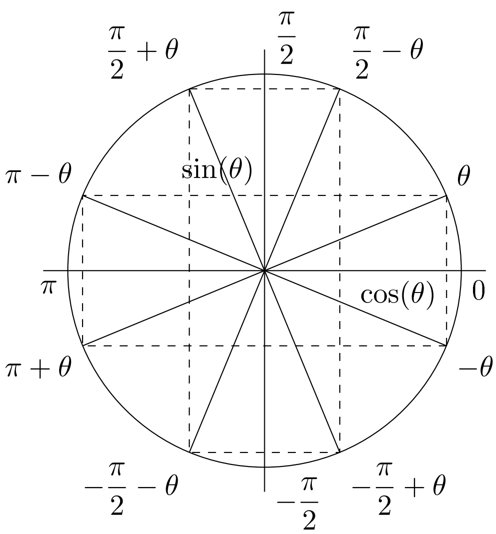
c) Valeurs à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	



3) Propriétés de symétries

Du fait de la définition géométrique des fonctions cos et sin, de nombreuses propriétés découlent immédiatement des propriétés géométriques du cercle. Tout peut se démontrer absolument rigoureusement, mais ce ne sera pas l'objet de cette partie.



Propriété 5 :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$\cos(-\theta) =$ et $\sin(-\theta) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

$\cos(\pi-\theta) =$ et $\sin(\pi-\theta) =$

$\cos(\pi+\theta) =$ et $\sin(\pi+\theta) =$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

Corolaire 1 :

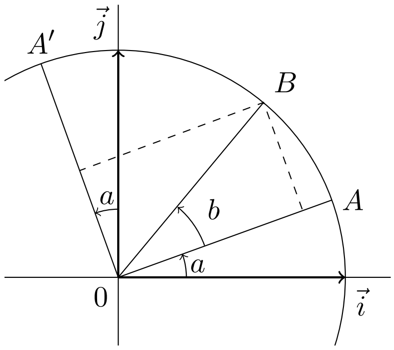
$\tan(-\theta) =$; $\tan(\theta+\pi) =$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$; $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$

II Formule d'addition et conséqences

1) Formule d'addition :

L'objectif de cette section est de déterminer une formule pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.
Pour cela, on va utiliser le schema suivant :



Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
Le point A à pour coordonnées :

Le point B a pour coordonnées :

Enfin le point A' a pour coordonnées :

Ainsi, $\overrightarrow{OA} = \qquad \vec{i} + \qquad \vec{j}$,

$\overrightarrow{OA'} =$

et enfin $\overrightarrow{OB} =$

De plus, dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$, le point B a pour coordonnées

D'où $\overrightarrow{OB} = \qquad \overrightarrow{OA} + \qquad \overrightarrow{OA'}$

On remplace et il vient

$\overrightarrow{OB} =$

En comparant les deux écritures, on a donc

$\cos(a+b) =$ et $\sin(a+b) =$

Enfin, en écrivant $a-b$ sous la forme $a+(-b)$ on trouve les dernière formules et on a donc :

Proposition 2 :

Pour tout réel a, b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Corolaire 2 :

Pour tout a, b réels différents de $\frac{\pi}{2}$ $[\pi]$:

- si $a+b$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- si $a-b$ est différent de $\frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

▷ *Preuve* :

◁

2) Conséquences à savoir retrouver à partir des formules précédentes :

A partir des formules de d'addition, vous devez savoir retrouver les formules suivantes :

a) Formules de duplications :

En posant simplement $b = a$, on obtient :

Proposition 3 :

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$ (si a et $2a$ différents de $\dfrac{\pi}{2}$ $[\pi]$)

b) Formules de linéarisation :

Proposition 4 :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big)$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big)$$

▷ *Preuve :*

◁

c) Formules de factorisation :

Proposition 5 :

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

▷ *Preuve :*

◁

3) Continuité et dérivation des fonctions trigonométriques :

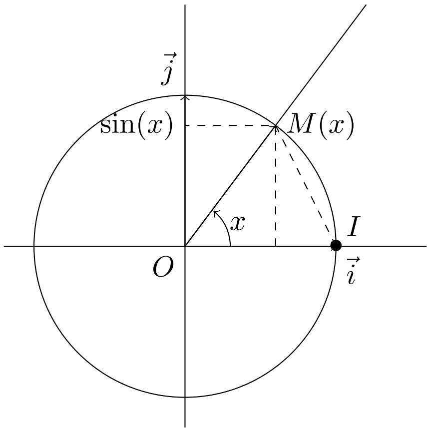
a) Continuité en 0 :

Proposition 6 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sin(x)| \leq |x|$$

▷ *Preuve* : Comme $|\sin(x)| \leq 1$, alors pour tout $x \in \left]-\infty, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, +\infty\right[$, on a $|x| \geq 1$ et donc $|\sin(x)| \leq |x|$.

Maintenant, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, par imparité, on montre pour $x \geq 0$ et on considère le schema ci dessous :



◁

Corolaire 3 :
Les fonctions sin et cos sont continues en 0.

▷ *Preuve* :

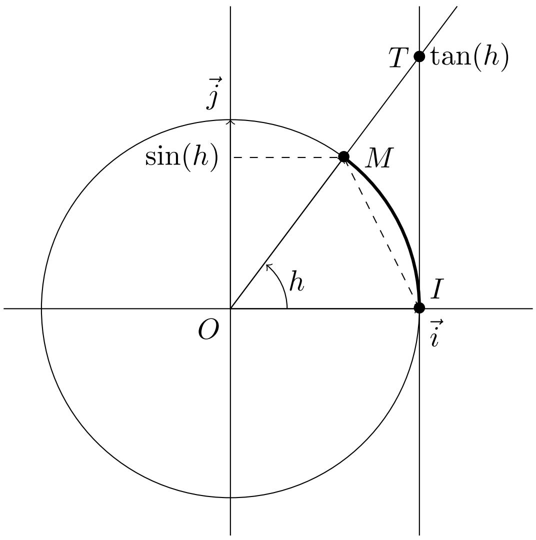
◁

b) Dérivabilité de sin :

Proposition 7 :
On a
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

▷ *Preuve* :

Pour $0 < h < \frac{\pi}{2}$, considérons le dessin :



Dans cette figure, il y a 3 aires qui vont nous intéresser : celle du triangle OMI, celle du secteur dessiné par l'arc $\widehat{MI}$, et celle du triangle OTI.

L'aire de OMI est $\frac{\sin(h)}{2}$,

celle du secteur $\widehat{OMI}$ est $\frac{h}{2}$,

et celle de OTI est $1 \times \frac{\tan(h)}{2}$.

D'où l'encadrement :

$$\frac{\sin(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\tan(h)}{2}$$

Comme $h \in]0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(h) > 0$ et on peut diviser notre encadrement :

$$1 \leq \frac{h}{\sin(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}$$

Par continuité de cos, quand $h \to 0$, on a $\cos(h) \to \cos(0) = 1$, d'où, par théorème des gendarmes, $\lim \frac{h}{\sin(h)} = 1$. Par passage à l'inverse,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Par parité, on a le même résultat à gauche de 0. ◁

Theorème 1 :
La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est cos.

▷ *Preuve* :

◁

c) Dérivation de cosinus :

Theorème 2 :
La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est $-\sin$.

▷ *Preuve* :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, regardons

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$

D'après la formule de factorisation,

$$\begin{aligned} \cos(x+h) - \cos(x) &= -2\sin\left(\frac{(x+h)+x}{2}\right)\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \\ &= -2\sin(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2}) \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\frac{2\sin(\frac{h}{2})\sin(x+\frac{h}{2})}{h} = -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\sin(x+\frac{h}{2})$$

Comme $\sin(x+\frac{h}{2}) = \sin(x)cos(\frac{h}{2}) + \cos(x)\sin(\frac{h}{2}) \to_{h\to 0} \sin(x).1 + \cos(x)0 = \sin(x)$
on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = -\sin(x)$$

◁