TD n° 7.

Calculs d'intégrales : indications.

Attention : ce sont juste des résultats, la rédaction est incomplète.

Exercice 1

Exercice 2

3. Par parties, en dérivant x :

$$\int_0^t x\sin(x)\mathrm{d}x = [x(-\cos(x))]_0^t - \int_0^t (-\cos(x)\mathrm{d}x = \boxed{-t\cos(t)+\sin(t)}$$

4. Le plus simple ici est de faire deux IPP de suite, en dérivant x^2 :

$$\begin{aligned}\int_0^t x^2e^x\mathrm{d}x &= [x^2e^x]_0^t - 2\int_0^t xe^x\mathrm{d}x\\ &= t^2e^t - 2\Big([xe^x]_0^t - \int_0^t 1\times e^x\mathrm{d}x\Big)\\ &= (t^2-2t)e^t + 2[e^x]_0^t\\ &= \boxed{(t^2-2t+2)e^t-2}\end{aligned}$$

6. On calcule $\displaystyle\int_{-1}^{\pi} x^2e^{(1+i)x}\mathrm{d}x$, et on prend la partie réelle. La fonction $x\longmapsto x^2e^{(1+i)x}$ admet une primitive $F : x\longmapsto (ax^2+bx+c)e^{(1+i)x}$ $(a,b,c\in\mathbb{C})$. Or, pour $x\in\mathbb{R}$,
$F'(x) = (2ax+b+(1+i)(ax^2+bx+c))e^{(1+i)x} = ((1+i)ax^2+(2a+(1+i)b x+(b+(1+i)c))e^{(1+i)x}$,
et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$, donc

$$\begin{cases}(1+i)a=1\\ 2a+(1+i)b=0\\ b+(1+i)c=0\end{cases}\quad\text{donc}\quad\begin{cases}a=\frac{1-i}{2}\\ b=i\\ c=-\frac{1+i}{2}\end{cases},$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\pi} x^2e^x\cos(x)\mathrm{d}x &= \mathrm{Re}\left(F(\pi)-F(-1)\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1-i}{2}\pi^2+i\pi-\frac{1+i}{2}\right)e^{(1+i)\pi}\right) - \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1-i}{2}-i-\frac{1+i}{2}\right)e^{(1+i)(-1)}\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\left(\frac{\pi^2-1}{2}+(\pi-\frac{\pi^2+1}{2})i\right)(-e^{\pi})\right) - \mathrm{Re}\left((-2i)e^{-1}e^{-i}\right)\\ &= \boxed{-\frac{\pi^2-1}{2}e^{\pi}+2e^{-1}\sin(1)}\end{aligned}$$

Exercice 3

3. On fait apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur : $x+3=\frac{1}{2}(2x+1)+\frac{5}{2}$, et donc

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_2^3\frac{2x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x + \frac{5}{2}\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}\\ &= \frac{1}{2}\big[\ln(|x^2+x-2|)\big]_2^3 + \frac{5}{2}\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}\\ &= \boxed{\frac{\ln(5)-\ln(2)}{2}+\frac{5}{2}\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-2}}\end{aligned}$$

Puis $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$, et pour tout réel $x \neq 1, -2$, on a

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1/3}{x-1}+\frac{-1/3}{x+2}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{\mathrm{d}}{x^2+x-2} &= \frac{1}{3}\int_2^3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}\big[\ln(|x-1|)-\ln(|x+2|)\big]_2^3\\ &= \ln(2)-\frac{\ln(5)}{3}\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\int_2^3 \frac{x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = 2\ln(2)-\frac{\ln(5)}{3}}$$

5. On a $t^3=t^3-t+t=(t^2-1)t+t$, donc

$$\int_2^u \frac{t^3}{t^2-1}\mathrm{d}t=\int_2^u\left(t+\frac{t}{t^2-1}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{\ln(|t^2-1|)}{2}\right]_2^u=\boxed{\frac{u^2+\ln(u^2-1)}{2}-2-\frac{\ln(3)}{2}}$$

Notez que pour cette intégrale, 2 et u doivent être dans un intervalle qui ne contient ni 1, ni -1, donc $u>1$, donc $u^2-1>0$.

7. On a

$$\begin{aligned}t^4 &= t^4+2t^3-2t^3\\ &= t^3(t+2)-2t^3-4t^2+4t^2\\ &= t^3(t+2)-2t^2(t+2)+4t^2+8t-8t\\ &= (t^3-2t^2)(t+2)+4t(t+2)-8t-16+16\\ &= (t^3-2t^2)(t+2)+4t(t+2)-8(t+2)+16\\ &= (t^3-2t^2+4t-8)(t+2)+16\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{t^4}{t+2}\mathrm{d}t=\int_0^1\left(t^3-2t^2+4t-8+\frac{16}{t+2}\right)\mathrm{d}t=\left[\frac{t^4}{4}-2\frac{t^3}{3}+4\frac{t^2}{2}-8t+16\ln(|t+2|)\right]_0^1=\boxed{16\ln(3/2)-\frac{77}{12}}$$

8. On intègre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ par parties, en intégrant 1 et dérivant $1/(1+t^2)$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \left[\frac{t}{t^2+1}\right]_0^1-\int_0^1 t\times\frac{(-2t)}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{t^2}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-2\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\boxed{\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}}$$

Exercice 4

Exercices classiques

Exercice 5 2. On pose $t = \mathrm{sh}(u)$. Alors $\mathrm{d}t = \mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u$, et les nouvelles bornes sont 0 (car $\mathrm{sh}(0) = 0$) et $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}(a) = 1$. Alors $1 + t^2 = 1 + \mathrm{sh}^2(u) = \mathrm{ch}^2(u)$, donc $(1+t^2)^{3/2} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(u)}^3 = \mathrm{ch}(u)^3$ car $\mathrm{ch}(u) \geqslant 0$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t &= \int_0^a \frac{\mathrm{sh}^4(u)\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{ch}^3(u)}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^a \mathrm{th}^2(u)\mathrm{sh}^2(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^a \mathrm{th}^2(u)(1+\mathrm{ch}^2(u))\mathrm{d}u \\
&= \int_0^a \mathrm{th}^2(u)\mathrm{d}u + \int_0^a \mathrm{sh}^2(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^a (\mathrm{th}'(u) - 1)\mathrm{d} + \frac{1}{2}\int_0^a (\mathrm{ch}(2u) - 1)\mathrm{d}u \\
&= \Big[\mathrm{th}(u) - u\Big]_0^a + \frac{1}{2}\Big[\frac{\mathrm{sh}(2u)}{2} - u\Big]_0^a \\
&= \mathrm{th}(a) - a + \frac{\mathrm{sh}(2a)}{4} - \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{ch}(a) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(a)} = \sqrt{2}$, et $\mathrm{th}(a) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$, et $\mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a) = 2\sqrt{2}$, donc

$$\boxed{\int_0^1 \frac{t^4}{(1+t^2)^{3/2}}\mathrm{d}t = \sqrt{2} - \frac{3}{2}a},$$

3. On pose $u = \ln(x)$, donc $x = e^u$, et $\mathrm{d}x = e^u\mathrm{d}u$, les nouvelles bornes sont 0 et $\ln(2)$, et

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sin(\ln(x))\mathrm{d}x &= \int_0^{\ln(2)} \sin(u)e^u\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{\ln(2)} e^{(1+i)u}\mathrm{d}u\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+i)u}}{1+i}\right]_0^{\ln(2)}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1-i}{2}\left(e^{(1+i)\ln(2)} - 1\right)\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1-i}{2}(2e^{i\ln(2)} - 1)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2} + \sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2))}
\end{aligned}$$

4. On pose $x = \arcsin(u/2)$, donc $u = 2\sin(x)$ (fonction $\mathcal{C}^1$). Alors $\mathrm{d}u = 2\cos(x)\mathrm{d}x$, et les nouvelles bornes sont $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$ et $\arcsin(1) = \pi/2$. De plus,

$$\sqrt{4-u^2} = 2\sqrt{1-\sin^2(x)} = |\cos(x)| = \cos(x)$$

car le cosinus est positif sur $[-\pi/6, \pi/2]$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \sqrt{4-u^2}u^2 \mathrm{d}u &= 2\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \cos(u) 4\sin^2(u) 2\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= 16\int_{-\pi/6}^{\pi/2} (\sin(x)\cos(x))^2 \mathrm{d}x \\
&= 4\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \sin^2(2x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_{-\pi/6}^{\pi/2} (1-\cos(4x))\mathrm{d}x \\
&= 2\left[x - \frac{\sin(4x)}{4}\right]_{-\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \boxed{\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}
\end{aligned}$$

5. On a

$$\int_1^e \frac{\ln(u)}{u}\mathrm{d}u = \left[\frac{\ln^2(u)}{2}\right]_1^e = \boxed{\frac{1}{2}}$$

7. On a évidemment $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = 0$ puisqu'on intègre une fonction impaire sur un intervalle centré en 0.

   Déterminons alors $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$. On pose $u = x^2$, donc $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, et les nouvelles bornes sont 0 et 1/4, et on a

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{1/4} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \boxed{\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{4}\right)}$$

   On peut aussi intégrer sans le changement de variable si on voit tout de suite qu'une primitive est $\dfrac{1}{2}\arcsin(x^2)$.

8. On pose $u = \mathrm{ch}(x)$, donc $\mathrm{d}u = \mathrm{sh}(x)\mathrm{d}x$, et les nouvelles bornes sont $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{ch}(1)$. On a alors

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{sh}^3(x)}{\mathrm{ch}(x)}\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{ch}(1)} \left(u + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\frac{u^2}{2} + \ln(|u|)\right]_1^{\mathrm{ch}(1)} = \boxed{\frac{\mathrm{ch}(2)-1}{4} - \ln(\mathrm{ch}(1))}$$

10. On effectue le changement de variable $u = e^x$ (fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Les nouvelles bornes sont $e^0 = 1$ et $e^1 = e$, et $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{(e^x+2)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x(e^x+2)}\mathrm{d}x \\
&= \int_1^e \frac{1}{u(u+2)}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \ln\left(\frac{2}{e+2}\right)\right)}
\end{aligned}$$

11. Première méthode : deux IPP. Tout d'abord on intègre $\sqrt{x+1} = (x+1)^{1/2}$ et on dérive x^2 :

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x+1}\mathrm{d}x = \left[x^2\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\mathrm{d}x = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3}\int_0^1 x(x+1)^{3/2}\mathrm{d}x.$$

Pour cette dernière intégrale, on dérive x et on intègre $(x+1)^{3/2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(x+1)^{3/2}\mathrm{d}x &= \left[x\frac{(x+1)^{5/2}}{5/2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)^{5/2}}{5/2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{(x+1)^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{24\sqrt{2}+4}{35}\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\int_0^1 x^2\sqrt{x+1}\mathrm{d}x = \frac{44\sqrt{2}-16}{105}}$$

DEuxième méthode : on pose $u = \sqrt{x+1}$, donc $x = u^2-1$ et $\mathrm{d}x = 2u\mathrm{d}u$. Les nouvelles bornes sont 1 et $\sqrt{2}$, et on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\sqrt{x+1}\mathrm{d}x &= 2\int_1^{\sqrt{2}} (u^2-1)^2u^2\mathrm{d}u \\ &= 2\int_1^{\sqrt{2}} (u^6-2u^4+u^2)\mathrm{d}u \\ &= 2\left[\frac{u^7}{7} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \boxed{\frac{44\sqrt{2}-16}{105}}\end{aligned}$$

12. On pose $x = \mathrm{sh}(u)$. Alors $\mathrm{d}x = \mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u$, les nouvelles bornes sont a et b où a et b sont tels que $\mathrm{sh}(a) = 1$ et $\mathrm{sh}(b) = 2$. Puis $\sqrt{x^2+1} = \mathrm{ch}(u)$ (car $\mathrm{ch}(u) \geqslant 0$), et on a alors

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\mathrm{d}x &= \int_a^b \frac{\mathrm{ch}(u)}{\mathrm{sh}^2(u)}\mathrm{ch}(u)\mathrm{d}u \\ &= \int_a^b \frac{1+\mathrm{sh}^2(u)}{\mathrm{sh}^2(u)}\mathrm{d}u \\ &= b - a + \int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{sh}^2(u)} \\ &= b - a - \int_a^b \left(\frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}\right)'(u)\mathrm{d}u \\ &= b - a - \frac{\mathrm{ch}(b)}{\mathrm{sh}(b)} + \frac{\mathrm{ch}(a)}{\mathrm{sh}(a)} \\ &= \boxed{b - a - \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2}}\end{aligned}$$

puisque par exemple $\mathrm{ch}(b) = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(b)} = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$.
Si on ne reconnaît pas la dérivée de ch/sh, on peut poser $t = e^u$ pour calculer la dernière intégrale.

15. On pose $u=\cos(x)$. Alors $\mathrm{d}u=-\sin(x)\mathrm{d}x$, les nouvelles bornes sont $\cos(0)=1$ et $\cos(\pi/2)=0$, et $3+\sin^2(x)=4-\cos^2(x)$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(x)}{3+\sin^2(x)}\mathrm{d}x &= \int_1^0\frac{-\mathrm{d}u}{4-u^2}\\ &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(2-u)(2+u)}\\ &= \int_0^1\left(\frac{-1/4}{u-2}+\frac{1/4}{u+2}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{4}\left[\ln(|u+2|)-\ln(|u-2|)\right]_0^1\\ &= \boxed{\frac{\ln(3)}{4}}\end{aligned}$$

Exercice 6 4. On a

$$(t-1)(2-t)=-t^2+3t-2=-\left(\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(1-(2t-3)^2\right),$$

dont la dérivée est $-2t+3$, donc pour $x\in\,]1,2[$,

$$\begin{aligned}\int_{3/2}^x\frac{t+1}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}\mathrm{d}t &= -\frac{1}{2}\int_{3/2}^x\frac{-2t+3}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}\mathrm{d}t+\frac{5}{2}\int_{3/2}^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1)(2-t)}}\\ &= -\left[\sqrt{(t-1)(2-t)}\right]_{3/2}^x+\frac{5}{2}\int_{3/2}^x\frac{\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}\sqrt{1-(2t-3)^2}}\\ &= -\sqrt{(x-1)(2-x)}+\sqrt{(3/2-1)(2-3/2)}+\frac{5}{2}\Big[\arcsin(2t-3)\Big]_{3/2}^x\\ &= \frac{5}{2}\arcsin(2x-3)-\sqrt{(x-1)(2-x)}+\text{cste}\end{aligned}$$

donc une primitive cherchée est

$$\boxed{x\longmapsto\frac{5}{2}\arcsin(2x-3)-\sqrt{(x-1)(2-x)}}$$

5. On calcule $\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}$ pour $x>0$. On pose $u=\sqrt{t}$, et $\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$. Les nouvelles bornes sont 1 et $\sqrt{x}$, et on a

$$\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{t}}=\int_1^{\sqrt{x}}\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=2(\arctan(\sqrt{x})-\arctan(1)),$$

donc une primitive cherchée est

$$\boxed{x\longmapsto 2\arctan(\sqrt{x})}\,.$$

6. Déjà fait en 5.4 : la technique est la même, sauf qu'on cherche une primitive, donc il faut avoir comme borne supérieure de l'intégrale une variable. On calcule par exemple $\displaystyle\int_0^x\sqrt{4-u^2}u^2\mathrm{d}u$ pour $x\in\,[-2,2]$. On obtient en posant $u=2\sin(t)$

$$\int_0^x\sqrt{4-u^2}u^2\mathrm{d}u=2\int_0^{\arcsin(x/2)}(1-\cos(4t)\mathrm{d}t.$$

$$\begin{aligned}\sin(4\arcsin(x/2)) &= 2\sin(2\arcsin(x/2)\cos(2\arcsin(x/2))\\ &= 4\sin(\arcsin(x/2))\cos(\arcsin(x/2))(2\cos^2(\arcsin(x/2))-1)\\ &= 4\times\frac{x}{2}\times\sqrt{1-(x/2)^2}\times\left(2(1-(x/2)^2)-1\right)\\ &= \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{2}\end{aligned}$$

donc on trouve comme primitive

$$\boxed{x\longmapsto 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4}}$$

Exercice 7 Pour le 1 : On calcule $\displaystyle\int_0^x t^2\arccos(t)\mathrm{d}t$ pour $x\in\,]-1,1[$. On procède par intégration par parties, en posant $u'(t)=t^2$, $v(t)=\arccos(t)$, $u(t)=t^3/3$ et $v'(t)=-1/\sqrt{1-t^2}$. On a alors

$$\int_0^x t^2\arccos(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left[t^3\arccos(t)\right]_0^x+\frac{1}{3}\int_0^x\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

Or,

$$\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{t^3-t}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}=t\sqrt{1-t^2}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}},$$

et donc

$$\int_0^x\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^x+\left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^x.$$

Une primitive cherchée est donc

$$x\longmapsto\frac{1}{3}x^3\arccos(x)-\frac{1}{9}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^2}.$$

Pour le 2 : on calcule $\displaystyle\int_0^x\arctan\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\mathrm{d}t$ pour $x>-3$ par intégration par parties, en posant $u'(t)=1$ et $v(t)=\arctan\left(\frac{t+1}{t+3}\right)$. On obtient (j vous laisse le calcul de $v'(t)$)

$$\int_0^x\arctan\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\mathrm{d}t=\left[t\times\arctan\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\right]_0^x-\int_0^x\frac{t}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t$$

Puis $t=\frac{1}{2}(2t+4)-2$, donc

$$\int_0^x\frac{t}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t+4}{t^2+4t+5}\mathrm{d}t-2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4t+5}=\frac{1}{2}\ln(|x^2+4x+5|)-\frac{\ln(5)}{2}-2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4t+5}.$$

Puis t^2+4t+5 a un discriminant <0, on le met donc sous forme canonique :

$$t^2+4t+5=1+(t+2)^2,$$

donc

$$\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4t+5}=\arctan(x+2)-\arctan(5),$$

et en regroupant tout, on obtient

$$\int_0^x\arctan\left(\frac{t+1}{t+3}\right)\mathrm{d}t=x\arctan\left(\frac{x+1}{x+3}\right)-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+2\arctan(x+2)+\frac{\ln(5)}{2}-2\arctan(5),$$

donc une primitive cherchée est par exemple

$$\boxed{x\longmapsto x\arctan\left(\frac{x+1}{x+3}\right)-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+2\arctan(x+2)}.$$