Exerices

Exercice 1.

1. Montrer que $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>1\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-2x+4y^2-8y\leqslant 11\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que $U=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>f(x)\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. On munit $\mathcal{C}([0\,;\pi],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$.
Soit $\Phi:\mathcal{C}([0\,;\pi],\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f\mapsto\int_0^\pi f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'application Φ est continue.
2. Déterminer $|||\Phi|||$.

Exercice 3. Soit $E=\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$ et

$$A=\left\{f\in E \mid f(0)=0 \text{ et } \int_0^1 f\geqslant 1\right\}.$$

1. Montrer que A est une partie fermée de E.
2. Montrer que : $\forall f\in A, \|f\|>1$.
3. Déterminer $d(0,A)$.

Exercice 4. On munit $\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_1$.
L'application $\varphi:\mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}, f\mapsto f(1)$ est-elle continue ?

Exercice 5. On note ℓ^∞ l'espace vectoriel normé des suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|x\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$, et on considère l'opérateur de différence $\Delta:\ell^\infty\longrightarrow\ell^\infty$ défini par $\Delta(x)=y$ où $y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, y_n=x_{n+1}-x_n$.

1. Montrer que Δ est linéaire et continue.
2. Déterminer $|||\Delta|||$.

Exercice 6. Soit $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par :

$$x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & \text{si } x\in\mathbb{Q} \text{ avec } x=\frac{p}{q} \text{ irréductible}, p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

En quels points h est-elle continue ?

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}, x\mapsto f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$ et
$A=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=0\}$, $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right\}$.
Est-ce que A est compacte ? Est-ce que B est compacte ?

Exercice 8. Soit A,B des parties d'un espace vectoriel normé E.

1. Montrer que si A et B sont compactes, alors $A+B$ est compacte.
   Indication : considérer $f:E\times E\longrightarrow E, (x,y)\mapsto x+y$ et $f(A\times B)$.
2. Montrer que si A est fermée et B est compacte, alors $A+B$ est fermée.
   Indication : utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
3. A-t-on l'implication : A et B fermés $\Rightarrow$ $A+B$ fermé ?
   Indication : considérer dans $\mathbb{R}^2$ l'axe des abscisses et le graphe de la fonction exponentielle.

Exercice 9.

1. Montrer que l'application $\Phi:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A\mapsto A^\top\times A$ est continue.
2. Montrer que le groupe orthogonal $O_n=\left\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mid A^\top\times A=I_n\right\}$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, ℓ sa limite et $A=\{u_n; n\in\mathbb{N}\}\cup\{\ell\}$.
Montrer que A est compacte.

Exercice 11. Soit

$$N_1 : \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\\ A & \longmapsto & \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|\end{array} \quad\text{et}\quad N_2 : \begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\\ A & \longmapsto & \displaystyle\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|\end{array}$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $N_i(A\times B)\leqslant N_i(A)\times N_i(B)$ pour $i\in\{1,2\}$.
3. Soit $A=\begin{pmatrix}\frac{-1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{7}\\ \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}$. La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?
   Indication : on calculera $\|A\|$ en choisissant bien la norme.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite B. Montrer que les seules valeurs propres éventuelles de B sont 0 et 1, que A et B commutent et que B est diagonalisable.

Exercice 13. Soit $E = \mathbb{C}[X]$ muni de la norme définie par :

$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X], \|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$$

1. Montrer que l'on définit bien ainsi une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. L'application $P \mapsto P(X+1)$ est-elle continue ?

Exercice 14.

1. (a) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ n'est pas un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (c) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Indication : utiliser la trigonalisation.
2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) En utilisant la densité, en déduire que le résultat reste vrai pour tout couple $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.
3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.
   (a) Montrer que :
   $$\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).$$
   Indication : utiliser $M \times \mathrm{Com} M^\top = \det(M) I_n$.
   (b) En déduire que :
   $$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).$$
4. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel normé dont la boule unité fermée est compacte. L'objectif de cet exercice est de montrer que E est de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_n \in B_f(0,1)$ tels que :
   $$\forall x \in B_f(0,1), \exists k \in [\![1\,;n]\!] \mid \|x - x_k\| < \frac{1}{2}.$$
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde.
2. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$; soit $x \in E$.
   Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}, \exists y_k \in F, u_k \in E \mid x = y_k + \frac{1}{2^{k+1}} u_k$ et $\|u_k\| < 1$.
3. En déduire que $x \in F$.
4. Conclure.

Banque CCINP

Exercice 17 (CCINP 38).

1. On se place sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $||\ ||_1$ définie par : $\forall\, f \in E$, $||f||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.
   Soit $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & u(f) = g \end{array}$ avec $\forall\, x \in [0,1]$, $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

   On admet que u est un endomorphisme de E.
   Prouver que u est continue et calculer $|||u|||$.
   Indication : considérer, pour tout entier n non nul, la fonction f_n définie par $f_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ un n-uplet **non nul**, **fixé**.
   Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \end{array}$.

   (a) Justifier que u est continue quel que soit le choix de la norme sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_2$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$.
   Calculer $|||u|||$.
   (c) On munit $\mathbb{R}^n$ de $||\ ||_\infty$ où $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
   Calculer $|||u|||$.
3. Déterminer un espace vectoriel E, une norme sur E et un endomorphisme de E non continu pour la norme choisie. Justifier.

Remarque : Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.