Corrigé du DL n° 2.

Exercice 1 1. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a
$$\frac{x}{x+1} \times \frac{1-x}{x} - 1 = -\frac{2x}{x+1},$$
et on a le tableau de signes suivant :

x	$-1 \quad 0 \quad 1$
$\frac{x}{x+1}$	$+ \;\Vert\; -\,0\,+ \quad +$
$\frac{1-x}{x}$	$- \qquad - \;\Vert\; +\,0\,-$
$\frac{x}{x+1}\frac{1-x}{x} - 1$	$- \;\Vert\; + \;\Vert\; - \quad -$

On en déduit que si $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$, on a
$$\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{x/(x+1) + (1-x)/x}{1-(1-x)/(1+x)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right),$$
et si $x \in]-1, 0[$ on a
$$\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \pi.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a
$$\arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right),$$
donc
$$\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\left(\frac{k}{k+1}\right) - \arctan\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$$
qui est une somme télescopique, qui vaut
$$\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \arctan(0) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

3. On a
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$
et la fonction arctangente est continue. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2 1. On a

$$p = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}.$$

2. On a

$$p^2 - 1 = e^{i(\pi-2\theta)} - 1 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} - e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right) = 2i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = 2\cos(\theta)e^{i(\pi-\theta)}.$$

On en déduit que

$$|p^2 - 1| = 2\cos(\theta), \quad \arg(p^2 - 1) \equiv \pi - \theta \mod 2\pi$$

car $\cos(\theta) > 0$.

3. D'après ce qui précède, on peut prendre

$$\delta = i\sqrt{2\cos(\theta)}e^{-i\frac{\theta}{2}}.$$

4. Le discriminant réduit de l'équation est $p^2 - 1$, et par exemple

$$z_1 = p - \delta \quad \text{et} \quad z_2 = p + \delta.$$

On en déduit que

$$z_1 - p = -\delta \quad \text{et} \quad z_2 - p = \delta,$$

et donc

$$|z_1 - p| = |z_2 - p| = |\delta| = \sqrt{|p^2 - 1|} = \sqrt{2\cos(\theta)},$$
$$\arg(z_1 - p) \equiv \arg(\delta) + \pi \equiv -\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \mod 2\pi \quad \text{et} \quad \arg(z_2 - p) \equiv \arg(\delta) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \mod 2\pi.$$

5. On a

$$p - i = i(e^{-i\theta} - 1) = ie^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = i2i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}},$$

donc

$$z_1 - i = p - i - \delta = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\sqrt{2\cos(\theta)}\right)$$

et

$$z_2 - i = p - i + \delta = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sqrt{2\cos(\theta)}\right),$$

qui ont tous deux pour module

$$\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\cos(\theta)} = \sqrt{2(1 - \cos(\theta) + 2\cos(\theta)} = \sqrt{2}.$$

De même,

$$p + i = i(e^{-i\theta} + 1) = i2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\frac{\theta}{2}},$$

donc

$$z_1 + i = p + i - \delta = ie^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}\right)$$

et

$$z_2 + i = p + i + \delta = ie^{-i\frac{\theta}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}\right).$$

Or,

$$\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sqrt{2\cos(\theta)}\right)\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sqrt{2\cos(\theta)}\right) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 2\cos(\theta) = 2 > 0$$

ce qui prouve que $z_1 + i$ et $z_2 + i$ ont même argument.

Exercice 3 1. On a $(5+i)^4 = (24+10i)^2 = 4(12+5i)^2 = 4(119+120i)$, et $(239+i)(1+i) = 238+240i = 2(119+120i)$. Le nombre complexe de l'énoncé vaut donc $\boxed{2}$.

2. Remarquons que si x est un réel > 0, alors $\arctan(1/x)$ est un argument de $x+i$. En effet, ce nombre complexe est non nul, donc possède un argument. Mais un réel θ est un argument de $x+i$ si et seulement si $\cos(\theta) > 0$ (car $x > 0$) et $\tan(\theta) = 1/x$. C'est le cas de $\arctan(1/x)$.

   On en déduit que $4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) - \pi/4$ est un argument de z. Mais $z \in \mathbb{R}_+^*$, donc $4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) - \pi/4 \equiv 0 \mod 2\pi$.

   Enfin, $\arctan(1/5)$ et $\arctan(1/239)$ sont dans l'intervalle $]0, \pi/4[$, donc $4\arctan(1/5) - \arctan(1/239) - \pi/4 \in]-\pi/2, 3\pi/4[$, et finalement vaut 0.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$1 + f^2(x/2) - 2|f(x/2)| = (1 - |f(x/2)|)^2 \geqslant 0$$

ce qui prouve que

$$|f(x)| = \left|\frac{2f(x/2)}{1+f^2(x/2)}\right| \leqslant 1,$$

donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 1$. Alors

$$1 = f(x_0) = \frac{2f(x_0/2)}{1+f^2(x_0/2)} \quad \text{donc} \quad (1 - f(x_0/2))^2 = 0.$$

On en déduit que $f(x_0/2) = 1$, et par une récurrence immédiate, que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(x_0/2^n) = 1.$$

Comme f est dérivable en 0, elle est continue en 0 donc

$$1 = \lim_{n\to+\infty} f(x_0/2^n) = f(0).$$

Comme f est majorée par 1, elle admet un maximum en 0, donc $f'(0) = 0$: absurde. On montre de la même manière que la valeur -1 n'est pas atteinte par f, et donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1.$$

Considérons la fonction $g = \operatorname{argth} \circ f$, qui est bien définie d'après le résultat précédent. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors (car $\operatorname{th}(a+b) = (th(a) + \operatorname{th}(b))/(1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b))$)

$$f(2x) = \operatorname{th}(2\operatorname{argth}(f(x))) \quad \text{donc} \quad g(2x) = 2g(x).$$

Une récurrence immédiate prouve alors que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ g(x) = 2^n g\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{xg(x/2^n)}{x/2^n},$$

le dernière égalité n'étant vraie que pour $x \neq 0$. Comme g est dérivable en 0 (puisque f et argth le sont), on a pour $x \neq 0$

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{xg(x/2^n)}{x/2^n} = xg'(0),$$

égalité qui reste vraie pour $x = 0$ par continuité de g en 0. On en déduit que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{th}(ax),$$

où on a posé $a = g'(0)$. Réciproquement, on vérifie que toutes ces fonctions sont bien solution du problème pour tout $a \neq 0$.