DEVOIR MAISON 4 - Suites et séries de fonctions
Corrigé

EXERCICE 1

1.(a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Montrons que la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

C'est une série alternée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = (-1)^n \times \frac{1}{\sqrt{1+nx}}$ avec $\frac{1}{\sqrt{1+nx}} \geq 0$.

La suite $\left(\frac{1}{\sqrt{1+nx}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (car $x \geq 0$) et converge vers 0 donc par le critère spécial des séries alternées, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge.

Ainsi :

$$\text{la série de fonctions } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } [1, +\infty[.$$

1.(b) La série $\sum_{n \geq 0} |f_n(1)| = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{1+n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car c'est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} f_n(1)$ ne converge pas absolument, on en déduit que :

$$\text{la série de fonctions } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ ne converge pas normalement sur } [1, +\infty[.$$

1.(c) On a prouvé à la question 1.(a) que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[1, +\infty[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{1+kx}}$.

Montrons que la suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ vers la fonction nulle $\varphi : x \mapsto 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [1, +\infty[$.

On a par le critère spécial des séries alternées (dont les hypothèses sont vérifiées comme vu en 1.(a)) :

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{1+(n+1)x}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+(n+1)x}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}_{\text{ne dépend pas de } x}$$

car $1+(n+1)x \geq 1+(n+1) > 0$.

Ainsi, $\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ est un majorant de l'ensemble $\{|R_n(x) - \varphi(x)|, x \in [1, +\infty[\}$ et $\|R_n - \varphi\|_{\infty}^{[1, +\infty[}$ est le plus petit de ses majorants donc :

$$\|R_n - \varphi\|_{\infty}^{[1, +\infty[} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \|R_n - \varphi\|_{\infty}^{[1, +\infty[} \leq \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$ donc par le théorème

de limite par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n - \varphi\|_{\infty}^{[1, +\infty[} = 0$.

On a ainsi prouvé que :

$$\text{la série de fonctions } \sum_{n \geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } [1, +\infty[.$$

2.(a) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1 + |\sin(nx)|}{3^n} \leq \underbrace{\frac{2}{3^n}}_{\text{ne dépend pas de } x} \quad \text{car } |\sin(nx)| \leq 1.$$

Ainsi, $\frac{2}{3^n}$ est un majorant de l'ensemble $\{|f_n(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ et $\|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$ est le plus petit majorant de cet ensemble.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}} \leq \frac{2}{3^n}$.

De plus, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n}$ converge (car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1, 1[$) donc la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{2}{3^n}$ converge également.

Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \|f_n\|_{\infty}^{\mathbb{R}}$ converge.

Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc :

sa somme φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Montrons que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ (par les théorèmes généraux car la fonction sin est continue sur $\mathbb{R}$).

* La série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que :

φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2.(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

La série géométrique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n}$ converge (car $-1 < \frac{1}{3} < 1$) et a pour somme $\frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$.

La série géométrique $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{e^{ix}}{3}\right)^n$ converge (car $\left|\frac{e^{ix}}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$) et a pour somme $\frac{e^{ix}/3}{1 - e^{ix}/3} = \frac{e^{ix}}{3 - e^{ix}}$.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} \text{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{3^n}$ converge également et on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Im}\left(\frac{e^{inx}}{3^n}\right) = \text{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right).$$

Par linéarité, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sin(nx)}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{2} + \text{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right).$$

Ainsi :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \text{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{3^n}\right) &= \text{Im}\left(\frac{e^{ix}}{3 - e^{ix}}\right) = \text{Im}\left(\frac{e^{ix}(3 - e^{-ix})}{|3 - \cos(x) - i \sin(x)|^2}\right) \\ &= \text{Im}\left(\frac{3e^{ix} - 1}{(3 - \cos(x))^2 + (\sin(x))^2}\right) = \frac{3 \sin(x)}{9 - 6 \cos(x) + \cos^2(x) + \sin^2(x)} = \frac{3 \sin(x)}{10 - 6 \cos(x)}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{\sin(x)}{5 - 3 \cos(x)}.$$

EXERCICE 2

A.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) = \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &= (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))\right) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{P_n(x)}{2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad \sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{P_n(x)}{2}\right).$$

A.2. Soit $x \in [0, 1]$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

Initialisation : Pour $n = 0$, comme $P_0(x) = 0$, on a bien $0 \leq P_0(x) \leq \sqrt{x}$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$.

On a $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$ et on a par hypothèse de récurrence, $P_n(x) \geq 0$ et $P_n^2(x) \leq x$.

En tant que somme de deux réels positifs, on a donc $P_{n+1}(x) \geq 0$.

Montrons que $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$ en utilisant la question A.1.

On a par hypothèse de récurrence, $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et :

$$1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{P_n(x)}{2} \geq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} = 1 - \sqrt{x} \geq 0 \text{ car } x \in [0, 1].$$

En tant que produit de deux réels positifs, on a donc $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$ d'où $P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

On peut donc conclure par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}.$$

A.3. Soit $x \in [0, 1]$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \geq 0$$

puisque $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ donc $P_n^2(x) \leq x$. Ainsi :

$$\text{pour tout } x \in [0, 1], \text{ la suite } (P_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}$$

Soit $x \in [0, 1]$.

La suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par $\sqrt{x}$) donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. Notons $f(x)$ sa limite.

On a ainsi prouvé que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f .

Déterminons $f(x)$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) \geq 0$ donc par passage à la limite, $f(x) \geq 0$.

On a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$ donc par passage à la limite (par décalage d'indice, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{n+1}(x) = f(x)$), on obtient :

$$f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(x - (f(x))^2) \text{ d'où } (f(x))^2 = x.$$

Comme on a de plus $f(x) \geq 0$, on en déduit que $f(x) = \sqrt{x}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } [0, 1] \text{ vers } f : x \mapsto \sqrt{x}.}$$

4. Soit $x \in [0, 1]$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sqrt{x} - P_0(x) = \sqrt{x}$ et $\sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^0 = \sqrt{x}$.

La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.

On a d'après A.1. :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{P_n(x)}{2}\right).$$

Or, par hypothèse de récurrence, on a $\sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$ et comme $P_n(x) \geq 0$, on a aussi

$$1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{P_n(x)}{2} \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

Comme ce sont deux inégalités à termes positifs (vu en question A.2), on obtient en les multipliant :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n+1}.$$

On peut donc conclure par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n.}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction g_n est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$ (par les théorèmes généraux) et on a pour tout $x \in]0, 1[$:

$$g'_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n + \sqrt{x} \times \left(-\frac{n}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1}}_{>0} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{n\sqrt{x}}{2}\right)$$

du signe de $1 - \sqrt{x} \frac{n+1}{2}$. Or pour tout $x \in [0, 1]$:

$$1 - \sqrt{x} \frac{n+1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{(n+1)^2}.$$

Ainsi, g'_n est positive sur $\left[0, \frac{4}{(n+1)^2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{4}{(n+1)^2}, 1\right]$ (on a bien $0 \leq \frac{4}{(n+1)^2} \leq 1$).

On en déduit que la fonction g_n est croissante sur $\left[0, \frac{4}{(n+1)^2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{4}{(n+1)^2}, 1\right]$ donc elle admet un maximum sur $[0, 1]$ atteint en $\frac{4}{(n+1)^2}$ qui vaut :

$$g_n\left(\frac{4}{(n+1)^2}\right) = \frac{2}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Comme g_n est positive sur $[0, 1]$, on a alors :

$$\|g_n\|_{\infty}^{[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x)| = \frac{2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

On a au voisinage de $+\infty$:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \exp(-n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)) = \exp\left(-n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g\|_\infty^{[0,1]} = 0$, en notant g la fonction nulle.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0, 1] \text{ vers la fonction nulle.}}$$

D'après la question A.2 et A.4, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$:

$$|P_n(x) - \sqrt{x}| = \sqrt{x} - P_n(x) \leq g_n(x) \leq \|g_n\|_\infty^{[0,1]}.$$

Ainsi, $\|g_n\|_\infty^{[0,1]}$ est un majorant de l'ensemble $\{|P_n(x) - \sqrt{x}|, x \in [0, 1]\}$ et $\|P_n - f\|_\infty^{[0,1]}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \|P_n - f\|_\infty^{[0,1]} \leq \|g_n\|_\infty^{[0,1]}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n\|_\infty^{[0,1]} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n - f\|_\infty^{[0,1]} = 0$ donc :

$$\boxed{\text{la suite } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0, 1] \text{ vers } f : x \mapsto \sqrt{x}.$$

B.1. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme de Newton, on a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1^n = 1.}$$

B.2. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 0 + \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} x x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} = nx \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}$$

par le changement d'indice $\ell = k - 1$.

Donc par le binôme de Newton, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(x + 1 - x)^{n-1} = nx.$$

On vérifie aisément que c'est aussi vrai pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, 1] \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx.}$$

B.3. Soit $x \in [0, 1]$.

* Pour n valant 0 ou 1, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $k^2 = k$ et $n(n-1) = 0$ donc :

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{B.2}{=} nx = nx + n(n-1)x^2.$$

* Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\stackrel{B.2}{=} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + nx \\ &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + nx \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-2-\ell} + nx \quad \text{via } \ell = k - 2 \\ &= n(n-1)x^2(x + 1 - x)^{n-2} + nx = n(n-1)x^2 + nx \quad (\text{binôme de Newton}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0, 1] \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2.}$$

Remarque : Dans le cas où $n \in \mathbb{N}^*$, on pouvait aussi introduire une variable aléatoire X suivant la loi binômiale de paramètres n et x .

On pouvait alors traiter les questions B.1, B.2 et B.3 en remarquant que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = E(X) = nx$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n k^2 P(X = k) = E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 = nx(1-x) + n^2 x^2 = nx + n(n-1)x^2$$

par le théorème du transfert et la formule d'Huygens.

B.4. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n (k^2 - 2knx + n^2 x^2) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Donc en scindant la somme en trois, avec B.3, B.2 et B.1, on trouve :

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx - 2nx \times nx + n^2 x^2 \times 1 = (n^2 - n - 2n^2 + n^2)x^2 + nx.$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Or pour x dans $[0, 1]$, $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq 1-x \leq 1$ donc $0 \leq x(1-x) \leq 1$, ainsi comme $n \geq 0$, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq Cn \text{ avec } C = 1.}$$

B.5. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

D'après B.1, on a $1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ donc :

$$\begin{aligned} B_n(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \\ &\stackrel{*}{=} \underbrace{\sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) + \underbrace{\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right). \end{aligned}$$

(* car $X \cup Y = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $X \cap Y = \emptyset$).

Donc par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \underbrace{\sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0} \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0} \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|}_{\leq 2\|f\|_\infty}.$$

En effet, par choix de X , pour tout k dans X , on a $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \varepsilon$, et comme f est continue sur le segment $[0; 1]$, f y est bornée donc $\|f\|_\infty$ existe et pour tout k dans Y , on a $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty$.

Ainsi $|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

Mais $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$ pour tout k de $[[0; n]]$ qui contient X , donc en ajoutant des termes positifs, on observe $\sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in [[0; n]]} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{B.1}{=} 1$

Donc comme $\varepsilon \geq 0$, on obtient :

$$\boxed{|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.}$$

B.6. La question B.4 assure (pour le réel x de $[0; 1]$ fixé depuis la question B.5) :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{n^2} \leq \frac{C}{n}.$$

Donc comme X et Y sont disjoints et de réunion $[[0; n]]$, en réécrivant la première somme :

$$\sum_{k \in X} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in Y} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{C}{n}.$$

Or par choix de Y , on a :

$$\sum_{k \in Y} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq \underbrace{\sum_{k \in Y} \alpha^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0}.$$

$$\text{Donc } \sum_{k \in Y} \alpha^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{C}{n} - \underbrace{\sum_{k \in X} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{\geq 0} \leq \frac{C}{n}.$$

Ainsi en utilisant la question B.5., on obtient : $|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{C}{\alpha^2 n} \|f\|_\infty$.

Comme la suite de terme général $2\frac{C}{\alpha^2 n} \|f\|_\infty$ tend vers 0, il existe une valeur N dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N$, on a $2\frac{C}{\alpha^2 n} \|f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Ainsi pour tout $n \geq N$, on a $|B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$.

Le choix de N ne dépend que de α (donc du ε choisi). Ainsi pour $n \geq N$, 2ε est un majorant de $\{|B_n(x) - f(x)|; x \in [0; 1]\}$ dont le plus petit des majorants est la borne supérieure $\|B_n - f\|_\infty$ donc :

$$\boxed{\|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.}$$

On a ainsi prouvé que la suite de fonctions polynômiales $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction f .