4.1.2 Cinématique référentiels en rotation-Exercice 1

Un manège d'enfant tourne à une vitesse angulaire constante ω ($\omega > 0$). Le propriétaire parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets.

1-Tout d'abord, partant du centre à l'instant $t = 0$, il suit un rayon de la plate-forme avec un mouvement uniforme de vitesse v.

a-Etablir l'équation de la trajectoire de l'homme :

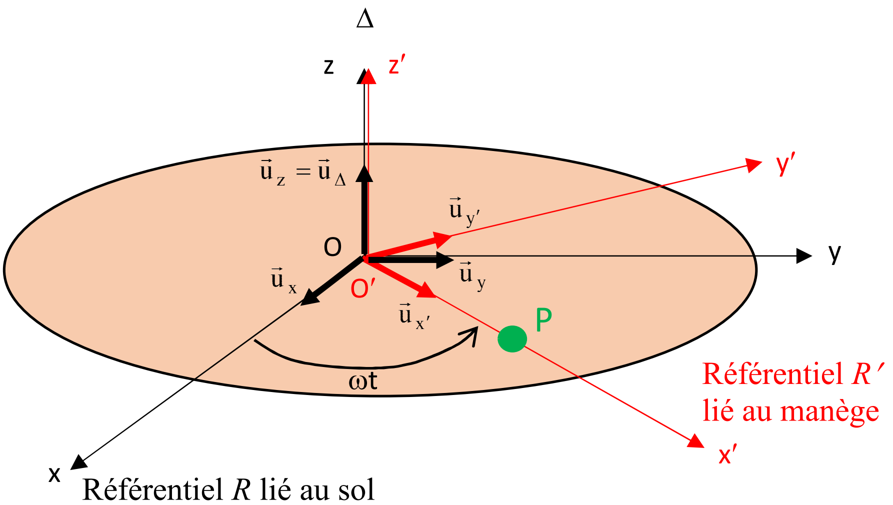
- Dans le référentiel R' lié au manège (trajectoire vue par les enfants).
- Dans le référentiel R lié au sol (trajectoire vue par les parents qui attendent les enfants).

b-Déterminer la vitesse et l'accélération absolue de l'homme :

- à partir de l'équation paramétrique de la trajectoire.
- à partir des lois de composition des mouvements.

2-Maintenant l'homme parcourt sur le manège un cercle de rayon r_0 concentrique à la plate-forme, à une vitesse constante $r_0\omega'$. Reprendre les questions précédentes. Etudier le cas particulier $\omega' = -\omega$.

4.1.2 Cinématique référentiels en rotation-Exercice 1



1-a) Dans R' : la trajectoire du propriétaire P est rectiligne selon le rayon O′x′, d'équation : $\boxed{x'(t) = vt}$

Dans R : la trajectoire du propriétaire a pour équations : $\boxed{x(t) = vt\cos(\omega t) \qquad y(t) = vt\sin(\omega t)}$

b) Méthode 1 :

$\vec{v}_{P/R} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y$ soit : $\boxed{\vec{v}_{P/R} = [v\cos(\omega t) - vt\omega\sin(\omega t)]\vec{u}_x + [v\sin(\omega t) + vt\omega\cos(\omega t)]\vec{u}_y}$

$\vec{a}_{P/R} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y$ soit : $\boxed{\vec{a}_{P/R} = [-vt\omega^2\cos(\omega t) - 2v\omega\sin(\omega t)]\vec{u}_x + [-vt\omega^2\sin(\omega t) + 2v\omega\cos(\omega t)]\vec{u}_y}$

Méthode 2 :

Loi de composition des vitesses : $\boxed{\vec{v}_{P/R} = \vec{v}_{P/R'} + \vec{v}_e}$

Avec : $\vec{v}_{P/R'} = \dot{x}'(t)\vec{u}_{x'} = v\vec{u}_{x'} = v[\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_y]$

Avec : $\vec{v}_e = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P} = \omega\vec{u}_z \wedge x'(t)\vec{u}_{x'} = \omega x'(t)\vec{u}_{y'} = \omega vt[-\sin(\omega t)\vec{u}_x + \cos(\omega t)\vec{u}_y]$

On retrouve : $\vec{v}_{P/R} = [v\cos(\omega t) - vt\omega\sin(\omega t)]\vec{u}_x + [v\sin(\omega t) + vt\omega\cos(\omega t)]\vec{u}_y$

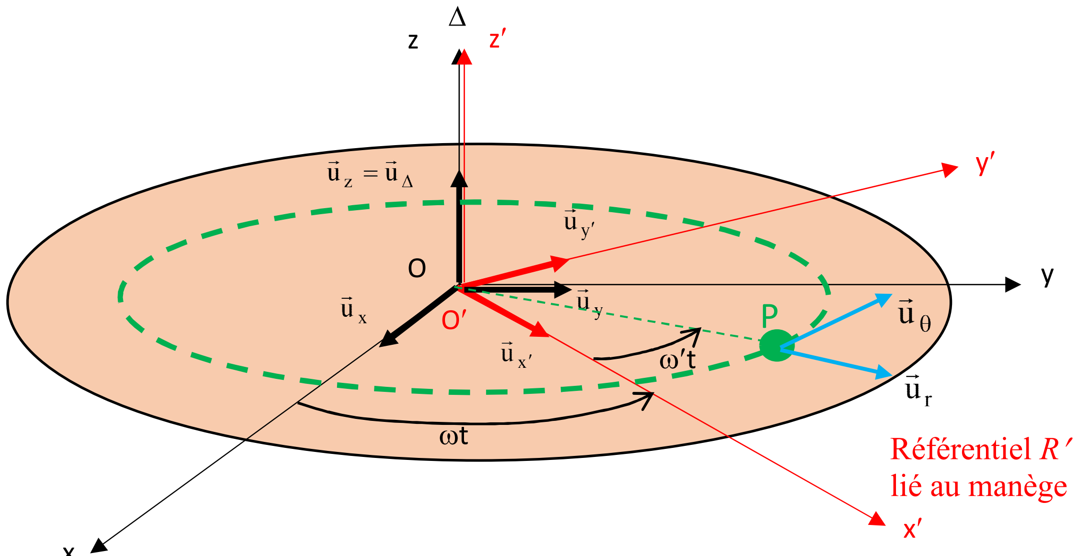
Loi de composition des accélérations : $\boxed{\vec{a}_{P/R} = \vec{a}_{P/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$

Avec : $\vec{a}_{P/R'} = \ddot{x}'(t)\vec{u}_{x'} = \vec{0}$ car v = constante

Avec : $\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HP} = -\omega^2\overrightarrow{OP} = -\omega^2[x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y] = -\omega^2[vt\cos(\omega t)\vec{u}_x + vt\sin(\omega t)\vec{u}_y]$

Avec : $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{P/R'} = 2\omega\vec{u}_z \wedge v\vec{u}_{x'} = 2\omega v\vec{u}_{y'} = 2\omega v[-\sin(\omega t)\vec{u}_x + \cos(\omega t)\vec{u}_y]$

On retrouve : $\vec{a}_{P/R} = [-vt\omega^2\cos(\omega t) - 2v\omega\sin(\omega t)]\vec{u}_x + [-vt\omega^2\sin(\omega t) + 2v\omega\cos(\omega t)]\vec{u}_y$



2-a) Dans R' : la trajectoire du propriétaire P est un cercle de rayon r_0 décrit à la vitesse angulaire ω′
Dans R : la trajectoire du propriétaire P est un cercle de rayon r_0 décrit à la vitesse angulaire ω′ + ω

b) <u>Méthode 1</u> :

vecteur position : $\overrightarrow{OP} = r_0 \vec{u}_r$

vecteur vitesse : $\vec{v}_{P/R} = r_0 \left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_R$ soit : $\boxed{\vec{v}_{P/R} = r_0(\omega+\omega')\vec{u}_\theta}$

vecteur accélération : $\vec{a}_{P/R} = r_0(\omega+\omega')\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_R$ soit : $\boxed{\vec{a}_{P/R} = -r_0(\omega+\omega')^2\vec{u}_r}$

<u>Méthode 2</u> :

Loi de composition des vitesses : $\boxed{\vec{v}_{P/R} = \vec{v}_{P/R'} + \vec{v}_e}$

Avec : $\vec{v}_{P/R'} = \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'P}}{dt}\right)_{R'} = r_0\left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right)_{R'} = r_0\omega'\vec{u}_\theta$

Avec : $\vec{v}_e = \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P} = \omega\vec{u}_z \wedge r_0\vec{u}_r = \omega r_0 \vec{u}_\theta$

On retrouve : $\vec{v}_{P/R} = r_0(\omega+\omega')\vec{u}_\theta$

Loi de composition des accélérations : $\boxed{\vec{a}_{P/R} = \vec{a}_{P/R'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$

Avec : $\vec{a}_{P/R'} = \left(\dfrac{d\vec{v}_{P/R'}}{dt}\right)_{R''} = r_0\omega'\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right)_{R''} = -r_0\omega'^2\vec{u}_r$

Avec : $\vec{a}_e = -\omega^2\overrightarrow{HP} = -\omega^2\overrightarrow{OP} = -\omega^2 r_0\vec{u}_r$

Avec : $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_{P/R'} = 2\omega\vec{u}_z \wedge r_0\omega'\vec{u}_\theta = -2\omega\omega' r_0\vec{u}_r$

On retrouve : $\vec{a}_{P/R} = -r_0(\omega+\omega')^2\vec{u}_r$

Si ω = -ω′, alors $\vec{v}_{P/R} = \vec{0}$. Le propriétaire est immobile par rapport au sol.