Corrigé du DM 7

Problème

Questions préliminaires

Q1. L'endomorphisme u est diagonalisable, il existe donc une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les d_i sont tous des valeurs propres de u. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u)) = P(D) = \mathrm{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$. Chaque d_i étant racine de P, on conclut que $P(D) = 0$ et donc que $P(u) = 0$.

$$\boxed{P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p) \text{ est annulateur de } u}$$

Q2. Les μ_i étant deux à deux distincts, les polynômes $X - \mu_i$ sont premiers entre eux deux à deux. Donc d'après le lemme des noyaux,

$$\mathrm{Ker}(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u - \mu_i Id)$$

Q annulant u, cet espace est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier. En ne conservant que les μ_i tels que $\mathrm{Ker}(u - \mu_i Id) \neq \{0\}$ et en concaténant des bases de ces espaces, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de u et telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux font tous partie des μ_i. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable et } \mathrm{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \dots, \mu_r\}}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q3. On a $\chi_V = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$, donc les valeurs propres de V sont donc 1 et 2. Et χ_V étant simplement scindé, V est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1. Comme $(2, -3)$ et $(1, -1)$ sont propres, ils engendrent chacun un sous-espace propre. Donc :

$$\boxed{V = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Q4. En faisant un produit par bloc, on vérifie que Q est inversible d'inverse

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

(il suffit de vérifier que $QQ^{-1} = I_{2n}$). Un produit par blocs montre alors que

$$\boxed{Q^{-1} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}}$$

ce qui donne la similitude voulue.

Q5. On obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}}$$

A est semblable à B elle même semblable à une matrice diagonale. Par transitivité de la relation de similitude,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

Q6. On a vu que

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = QBQ^{-1}$$

Appliquons le polynôme T qui annule la matrice de droite :

$$0 = QT(B)Q^{-1}$$

En multipliant par Q^{-1} à gauche et Q à droite, on conclut que $T(B) = 0$.
On montre par une récurrence immédiate que $B^k = \mathrm{diag}(A^k, (2A)^k)$ et en combinant linéairement, $T(B) = \mathrm{diag}(T(A), T(2A))$.
On en déduit alors que

$$\boxed{T(A) = 0}$$

Ainsi A est diagonalisable puisqu'elle est annulée par un polynôme simplement scindé. Finalement,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A \text{ l'est}}$$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q7. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice E. Donc

$$f(1,1) = (1,1)$$

Et pour $X = (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (-2)(1,1) + (x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=-2 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X=(y-1,2y)$$

Donc (pour $y=0$) $f(-1,0)=(-2)(1,1)+(-1,0)$. Et $((1,1),(-1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après les formules de changement de base :

$$\boxed{P^{-1}EP=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ avec } P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$$

Q8. De manière similaire à précédemment, $Z=\begin{pmatrix}I_n & -I_n\\ I_n & 0\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Z^{-1}=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & I_n\end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$\boxed{Z^{-1}\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}Z=\begin{pmatrix}A & -2A\\ 0 & A\end{pmatrix}}$$

Q9. Montrons par récurrence que

$$F^k=\begin{pmatrix}A^k & -2kA^k\\ 0 & A^k\end{pmatrix}$$

- C'est vrai au rang $k=0$ car $F^0=I_{2n}$.
- Supposons le résultat vrai au rang k. Il suffit alors d'un calcul par bloc pour voir que cela reste vrai au rang $k+1$.

En notant $U=\sum_{k=0}^{d}u_kX^k$, on en déduit que

$$U(F)=\begin{pmatrix}U(A) & V(A)\\ 0 & U(A)\end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V(A)=-2\sum_{k=1}^{d}ku_kA^k=-2AU'(A)$$

Comme $U(F)=0$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix}U(A) & -2AU'(A)\\ 0 & U(A)\end{pmatrix}=0}$$

Q10. Ce qui précède montre que U et XU' annulent A et sont donc multiples du polynôme minimal de μ_A de A (l'ensemble des polynômes annulateurs étant l'idéal engendré par μ_A). On en déduit que μ_A divise $U\wedge XU'$.
Or, U étant scindé simple, U et U' sont premiers entre eux (aucun des diviseurs irréductible de U ne divise U') et donc $U\wedge XU'=U\wedge X$.
Ainsi, μ_A est un diviseur de X. Or $\deg(\mu_A)\geqslant 1$ (un polynôme constant non nul n'annule aucune matrice) et ainsi $\mu_A=X$ (μ_A est unitaire). Comme μ_A annule A, A est nulle.

$$\boxed{\mu_A=X \text{ et } A=0}$$

Q11. Si $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ est diagonalisable alors F (qui lui est semblable) l'est aussi. On vient alors de voir que $A=0$.
Réciproquement, si $A=0$ alors $\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix}$ est nulle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\begin{pmatrix}3A & -2A\\ 2A & -A\end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A=0}$$

Q12. $\chi_F(\lambda)=\det(\lambda I_{2n}-F)$ est un déterminant bloc triangulaire. Avec la formule rappelée par l'énoncé,

$$\boxed{\chi_F=\chi_A^2}$$

Si F est trigonalisable alors χ_F est scindé et tout diviseur de χ_F l'est donc aussi. Ainsi, χ_A est scindé et A est trigonalisable.
Réciproquement, si A est trigonalisable alors χ_A est scindé et donc χ_F aussi. F est alors trigonalisable.

$$\boxed{F \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } A \text{ l'est}}$$

Q13. Soit $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. On a alors $\chi_A=(X^2+1)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et A n'est donc pas trigonalisable. Avec la question précédente, F ne l'est pas.

Applications

Q14. Si on pose $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, on a $M=\begin{pmatrix}A & 2A\\ 2A & A\end{pmatrix}$.
La matrice $W=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ est diagonalisable ($\chi_V=(X-3)(X+1)$ simplement scindé). On vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres. Comme en **Q4**, on vérifie que $Q=\begin{pmatrix}I_2 & I_2\\ I_2 & -I_2\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Q^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I_2 & I_2\\ I_2 & -I_2\end{pmatrix}$ et que

$$Q^{-1}MQ=\begin{pmatrix}3A & 0\\ 0 & -A\end{pmatrix}$$

Cette forme diagonale par bloc montre que les sous-espaces engendré par les 2 premiers (resp. 2 derniers) vecteurs de la nouvelle base (celle formée par les colonnes de Q) engendrent un espace stable par l'endomorphisme u.

$$\boxed{\text{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \text{ et } \text{Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)) \text{ sont stables par } u}$$

Q15. On a cette fois $M = \begin{pmatrix} 4I_2 & 2I_2 \\ 2I_2 & 4I_2 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ($\chi = (X-6)(X-2)$ simplement scindé) et on vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres (associés à 6 et 2). Comme en **Q4**, on vérifie que $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6I_2 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix}$$