Devoir Maison n° 7.
Pour le 4 novembre.

PROBLÈME

On note, pour n entier tel que $n \geqslant 2, \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type $\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et a, b, c, d sont quatre réels non tous nuls.
On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix}$ (chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). On pourra utiliser sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R}), A$ et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si T est un polynôme, $A = P^{-1}BP \Rightarrow T(A) = P^{-1}T(B)P$.
On rappelle que si A, B, C sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \cdot \det C$.

Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : "une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme P scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$". Pour cela on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Q1. On suppose que u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p (p \geqslant 1)$ les valeurs propres distinctes de u. Démontrer que le polynôme $P = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\ldots(X-\lambda_p)$ est annulateur de u.

Q2. Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ sont r nombres réels distincts $(r \geqslant 1)$ tels que $Q = (X-\mu_1)(X-\mu_2)\ldots.(X-\mu_r)$ est un polynôme annulateur de u. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que u est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r\}$.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Q3. On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que V est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale D vérifiant : $V = PDP^{-1}$ (on précisera P^{-1}).

Q4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice Q est inversible, donner la matrice Q^{-1} et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Q5. On suppose que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice R inversible et une matrice Δ diagonale telles que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs : $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$.
Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$?

Q6. On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit T un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

Q7. Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible P telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Q8. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Q9. On suppose que la matrice F est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de F, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note U' le polynôme dérivé de U.
Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Q10. Vérifier que le polynôme minimal de la matrice A est X. En déduire la valeur de la matrice A.

Q11. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Q12. On suppose que la matrice F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de F en fonction de celui de A. En déduire que F est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q13. Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Applications

Q14. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u.
On pourra s'inspirer de la question **Q4**.

Q15. En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème, démontrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.