
DEVOIR MAISON 5 - *Suites et séries de fonctions*
À rendre le jeudi 21 novembre

Exercice 1 (CCINP) : La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$,
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Q2. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

Q3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

Q4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions **Q5** et **Q6** sont indépendantes.

Q5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p), \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}.$$

Q7. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.

Q8. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Q9. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

Q10. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

Q11. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Exercice 2 (Centrale) : Le théorème de Borel

Le but de cet exercice est d'étudier l'existence d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dont on a fixé a priori les valeurs des dérivées successives en 0.

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$).

Partie I - Une fonction en cloche

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

I.1. a) Montrer que pour tout entier naturel p , il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}}.$$

Pour tout entier $p \geq 1$, exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1} .

b) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, Q_p est de degré $3p - 2$.

I.2. a) Montrer que pour tout entier naturel p

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g^{(p)}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g^{(p)}(x) = 0.$$

b) En déduire que $g \in \mathcal{W}$.

Partie II - Une fonction en plateau

Soit h la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par $h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t)dt}{\int_0^1 g(t)dt}$.

II.1. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, constante sur $] -\infty, 1]$ et sur $[2, +\infty[$.

II.2. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$ pour tout réel x .

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \geq 1$.

b) Montrer que φ est nulle en dehors de $[-1, 1]$ et tracer sommairement l'allure de son graphe.

c) Justifier pour tout entier naturel p non nul l'existence du réel

$$\lambda_p = \max_{k \in \{0, \dots, p-1\}} \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Partie III - Le théorème de Borel

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On définit pour tout entier naturel n une fonction g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_0(x) = \varphi(x) \quad \text{et si } n \geq 1, \quad g_n(x) = \frac{x^n}{n!} \varphi(\beta_n x)$$

où $\beta_n = \max(1, 4^n |u_n| \lambda_n)$.

III.1. a) Montrer que pour tout entier naturel n , la fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g_n est nulle hors du segment $\left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right]$.

III.2. Soit n et j des entiers naturels tels que $j < n$.

a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n^{(j)}(x) = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \beta_n^i \varphi^{(i)}(\beta_n x) \frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}.$$

b) En déduire que $g_n^{(j)}(0) = 0$.

c) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \geq \frac{1}{\beta_n}$, on a $g_n^{(j)}(x) = 0$.

d) Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq \frac{1}{\beta_n}$, on a $|u_n g_n^{(j)}(x)| \leq 2^{-(n+1)}$.

III.3. Dédurre des questions précédentes que pour $n, j \in \mathbb{N}$,

$$g_n^{(j)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}$$

III.4. En considérant $\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n$, montrer qu'il existe une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}, f^{(j)}(0) = u_j$ (théorème de Borel).