Parenthèsages optimaux de produits de matrices.

I) 1) Si le parenthèsage pour calculer $(A_0 \dots A_k)$ n'est pas optimal, on peut le remplacer par un meilleur choix, ce qui n'a pas d'incidence sur les façons de calculer $(A_{k+1} \dots A_n)$ ou le dernier produit. On améliore ainsi le score global ce qui contredit que le parenthèsage pour $A_0 \dots A_n$ est optimal.

2) $m_{i,i+1} = l_i l_{i+1} l_{i+2}$

3) Pour calculer $A_i \dots A_j$ on peut placer une parenthèse) après A_k $(i \leq k < j)$ et calculer séparément les deux produits $(A_0 \dots A_k)$ et $(A_{k+1} \dots A_j)$. Ce choix étant fait, le nombre minimal de multiplications est $m(i,k) + m(k+1,j) + l_i l_k l_{j+1}$.

II) 1) cf script Python

2) cf script Python

III) 1) M sera triangulaire supérieure stricte (les termes diagonaux sont nuls). Le résultat est $M[0,n]$

2) $M[i][i+d] = m(i, i+d)$ le nombre de multiplications pour obtenir $A_i A_{i+1} \cdots A_{i+d}$.

3) On aura :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 36 & 66 \\ 0 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

On commence par remplir $M[0,1] = 36$, $M[1,2] = 90$
Pour calculer $M[0,2]$, il faudra retenir le minimum des deux nombres :

$M[0,0] + M[1,2] + 2 \times 6 \times 5 = 0 + 90 + 60 = 150$

et

$M[0,1] + M[2,2] + 2 \times 6 \times 5 = 36 + 0 + 30 = 66$ pour lequel $k = 1$ → c'est celui-ci que l'on retient.
et $S[2,2] = 1$.

4) cf script Python

5) cf script Python

6) $m(0,4)$ est obtenu avec $k = S[0,4] = 1$:

$$(A_0 \times A_1) \times \underbrace{(A_2 \times A_3 \times A_4)}_{\text{reste à parenthéser}}.$$

$m(2,4)$ est obtenu avec $k = S[2,4] = 3$:
$(A_0 \times A_1) \times ((A_2 \times A_3) \times A_4)$.

7) cf script Python