Algèbre Chapitre 5

Calcul matriciel

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

I Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1) Définitions :

Soient n et p deux entiers naturels.

Définition :

On appelle **matrice** de taille $n \times p$ tout tableau A d'éléments de $\mathbb{K}$ comportant n lignes et p colonnes.
On note alors $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ où a_{ij} désigne l'élément à la i-eme ligne et j-eme colonne dans le tableau A.
On présentera également A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les éléments de la matrice A sont appelés "coefficients" de A.
L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple :

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice appartenant à
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice appartenant à

Remarque : deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes éléments dans le même ordre :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ est différente de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ et est différente de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2) Matrices particulières, vocabulaire :

- **Matrice nulle :** La matrice $O_{n,p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.
  Exemple :

$$O_{2,3} =$$

- **Matrice ligne :** On appelle matrice ligne toute $M \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

  Exemple : $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

  Quand on extrait la i ème ligne d'une matrice A, on parle du $i$eme **vecteur ligne**, souvent noté L_i.

  Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ est le $2e$ vecteur ligne de M, que l'on noterait donc L_2.

- **Matrice colonne :**
  Si $M \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on parle de matrice colonne.
  On définit, de la même façon que pour les lignes, le $j$eme **vecteur colonne** d'une matrice lorsqu'on extrait la j eme colonne. On le note souvent C_j.

- **Matrice carrée :**
  Une matrice M est dite carrée si $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$: elle a donc le même nombre de lignes et de colonnes.
  On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées.
  Exemple :
  $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in$

- **Matrice scalaire :**
  Si la matrice n'est constituée que d'une seule ligne et une seule colonne, on dit que la matrice est scalaire.
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ est une matrice scalaire

- **Matrice identité :**
  On appelle identité la matrice $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est nulle, sauf sur la diagonale, constituée uniquement de 1.
  On a alors

  $I_n =$ par exemple : $I_4 =$

II Opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1) Structure vectorielle :

a) Addition dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On définit l'opération $A + B$ par

$A + B = (\qquad\qquad)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} =$

On dit qu'on "additionne terme à terme".

Exemple :
$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} =$

Remarques :

1. Si a_{ij} et b_{ij} sont des éléments de $\mathbb{K}$, $a_{ij}+b_{ij}$ est un élément de $\mathbb{R}$ également, ainsi $A+B$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, tout comme A et B.
   On dit que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est stable pour l'opération $+$.
2. De part sa définition, l'opération d'addition sur les matrices hérite des propriétés de l'addition sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a ainsi :

3. Attention : si les matrices sont de tailles différentes, on ne peut pas les additionner...

b) Produit par un scalaire :

Définition :

Soit $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.
On définit λA par

$$\lambda A=(\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

Autrement dit : on multiplie tous les termes par λ.

Exemples :

- $2\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}=$
- $3\begin{pmatrix}1&4&5\\2&-1&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3&6&2\\-2&4&-3\end{pmatrix}=$

Remarques :

- Comme pour la somme, le produit par un scalaire est stable : on a bien $\lambda A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Cette opération hérite à nouveau des propriétés du produit sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, c'est à dire :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de ces opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, forme ce que l'on appelle un "espace vectoriel" : son comportement vis a vis de ces opérations est le même que celui que vous connaissez pour les vecteurs...

c) Matrices élémentaires

Définition :

On appelle **symbole de Kronecker** le nombre $\delta_{i,j}$, défini par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Exemples :

- $\delta_{0,1} =$, $\delta_{3,3} =$
- La matrice I_n (la matrice identité) peut être décrite sous la forme

$$I_n = (\delta_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

  Les coefficients diagonaux sont les $\delta_{i,i}$, et $\delta_{i,i} = 1$ et les coefficients hors diagonales sont $\delta_{i,j}$ avec $i \neq j$, c'est à dire $\delta_{i,j} = 0$.

Définition :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on pose $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient à la place (k, ℓ) vaut $\delta_{i,k}\delta_{\ell,j}$.
Autrement dit, $E_{i,j}$ est la matrice telle que

Ces matrices sont appelées **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple :
Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ sont :

On peut construire n'importe quelle matrice à partir de ces matrices élémentaires. Par exemple :
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$

On peut généraliser facilement avec le résultat suivant :

Propriété 1 :
Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Plus précisément, si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$A = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} E_{ij}$$

2) Produit matriciel

a) Définition :

Définition :

Soient n, p et q trois entiers naturels. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $C = AB$ comme la matrice $(c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ telle que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

En pratique :
On peut présenter l'opération de la manière suivante :

Exemple :
Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ on a

Propriété 2 :
Sous condition de compatibilité des tailles des matrices A, B et C, on a :
- (i) $(A + B)C =$
- (ii) $A(B + C) =$
- (iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(AB) =$
- (iv) $(AB)C =$

▷ *Preuve* : Montrons (i) (les autres se démontrent de la même façon)

◁

b) Attention aux pièges !

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Alors $AB =$ et $BA =$

  Ainsi, le produit n'est pas

- Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

  On a $AB =$

  On dit que A et B sont des diviseurs de zero : ceci n'existe pas chez les nombres réels (ni chez les nombres complexes).

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

  Alors $AB =$ et $CB =$

  Conclusion :

c) Produit de matrices élémentaires

Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note E_{ij} les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

De même, pour tout $(k,l) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$, on note F_{kl} les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Que vaut le produit $E_{i,j}F_{k,l}$ pour les différentes valeurs de i, j, k, l ?

3) Transposée d'une matrice :

a) Définition :

On munit $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une dernière opération :

Définition :

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **transposée** de A la matrice notée $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A^T = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec } b_{ij} = a_{ji}$$

Plus simplement : A^T est la matrice A dont on a interverti les lignes et les colonnes.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a pour transposée $A^T =$

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ a pour transposée $B^T =$

Remarques :

L'opération de transposition est une "bijection involutive" : c'est une bijection d'inverse elle même. En effet, $(A^T)^T =$.

b) Transposée et addition :

Propriété 3 :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors $(\lambda A)^T =$

et $(A + B)^T =$

On dit que l'opération de transposition est linéaire.

▷ *Preuve* :

La preuve est immédiate. ◁

c) Transposée et produit :

Proposition 1 :
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors $(AB)^T =$

▷ *Preuve* :

◁

III Cas des matrices carrées

1) L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

a) Matrices particulières : vocabulaire

Dans l'ensemble des matrices carrées, on rencontrera fréquemment des matrices de formes particulières, qui s'avèreront utiles dans de nombreuses situations.

- **Matrice triangulaire supérieure**
  On appelle matrice triangulaire supérieure toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
  On a alors

  $A =$ par exemple :

- **Matrice triangulaire inférieure :**
  On appelle matrice triangulaire inférieure toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
  On a alors

  $A =$ par exemple :

▶ **Matrice diagonale :**
On appelle matrice diagonale toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
On a alors

$A =$ par exemple :

b) Produit des matrices particulières :

Identité et matrices diagonales :
On dispose d'une matrice qui joue le rôle du 1 pour le produit des matrices carrées (et uniquement pour les matrices carrées...) : c'est l'identité.

Proposition 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de taille n. Alors

$$AI_n = I_n A = A$$

.

▷ *Preuve* : On le vérifie avec la formule du produit :

◁

Le même genre de preuve permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 3 :
Soit A et B deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$$

Alors AB est diagonale également et on a :

Produit de matrices triangulaires

Propriété 4 :
Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieur) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieur)

▷ *Preuve* :

◁

c) Matrices symétriques et anti-symétriques :

Définition :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est **symétrique** si et seulement si $A^T = A$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques.
- On dit que A est **antisymétrique** si et seulement si $A^T = -A$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exemples :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est
- $B = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est

2) Puissances de matrice :

a) Définition :

Définition :
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
On définit A^N par

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A^2 =$, $A^3 =$

et donc pour tout $n \geq 3$ on a : $A^n =$

On dit qu'une telle matrice est **nilpotente.**

b) Puissance de matrice diagonale :

Proposition 4 :

Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$,

Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$A^N =$$

▷ *Preuve* : On procède par récurrence, en utilisant la proposition 3. ◁

c) Formule du binôme de Newton pour les matrices :

Theorème 1 :

Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si

alors, $(A+B)^n =$

▷ *Preuve* : Par récurrence : même preuve que dans $\mathbb{R}$.

◁

Danger ! **Ne fonctionne pas si non commutatif**

La commutativité est essentielle : dans la preuve, on écrit que

$$(A+B)^{n+1} = (A+B)(A+B)^n = (A+B)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}$$

On peut toujours distribuer et arriver à $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A.A^kB^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B.A^kB^{n-k}$ mais on ne peut pas "regrouper" les puissances de B si A et B ne commutent pas.

3) Matrices inversibles : le groupe linéaire

a) Définition :

Définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **inversible** si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 5 :

Soit A une matrice inversible. Alors il existe une unique matrice B telle que $AB = BA = I$. On appelle alors cette matrice "inverse de A" et on la note A^{-1}.

$\triangleright$ *Preuve* :

$\triangleleft$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ a pour inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$: en effet, on a

A noter : Uniquement pour les matrices carrées

L'inverse de matrice n'est défini que pour les matrices carrés : il faut pouvoir à la fois calculer AB et BA, donc pour que le produit soit compatible à chaque fois, le nombre de lignes doit être égal au nombre de colonnes.

On admet pour le moment le résultat suivant, très pratique et qui va permettre de gagner du temps :

Proposition 6 :

Soit A une matrice est carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$ alors A inversible d'inverse B.

b) Propriétés :

Propriété 5 :
Soient A et B deux matrices inversibles, alors

(i) A^{-1} est inversible avec $(A^{-1})^{-1} =$

(ii) AB est inversible avec $(AB)^{-1} =$

(iii) A^T est inversible avec $(A^T)^{-1} =$

▷ *Preuve* :

◁

c) Le groupe linéaire

L'ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ muni du produit matriciel forme une structure qu'on appelle un **groupe** (d'où l'appellation GL_n pour "groupe linéaire").
Cela signifie qu'il vérifie les propriétés suivantes :

(i) $GL_n(\mathbb{K})$ est stable par le produit :

$$\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K}), AB \in GL_n(\mathbb{K})$$

(ii) Le produit est associatif

$$\forall A, B, C \in GL_n(\mathbb{K}), (AB)C = A(BC)$$

(iii) $GL_n(\mathbb{K})$ admet un neutre pour le produit :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), AI_n = A$$

(iv) Tout élément de $GL_n(\mathbb{K})$ admet un inverse pour le produit :

$$\forall A \in GL_n(\mathbb{K}), \exists B \in GL_n(\mathbb{K}), AB = BA = I_n$$

L'ensemble des nombres réels non nuls est également un groupe pour le produit, mais la différence fondamentale avec $GL_n(\mathbb{K})$ est que le produit n'est pas commutatif dans $GL_n(\mathbb{K})$....