# Corrigé du DS3

## Exercice

Soit $\ell^\infty(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornées et

$$\ell^1(\mathbb{K}) = \left\{ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge absolument} \right\}.$$

**1.** • par définition de $\ell^1(\mathbb{K})$, pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{K})$, la série $\sum |u_n|$ converge ; donc $N_1$ est bien définie sur $\ell^1(\mathbb{K})$ et à valeurs positives.

- **séparation** : soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$ tel que $N_1(u) = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, 0\,|u_k| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0$, d'où $u = 0$.
- **homogénéité** : soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N_1(\lambda u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = |\lambda|\, N_1(u).$$

- **inégalité triangulaire** : soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{K})$, pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$, donc par croissance et linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} N_1(u+v) &= \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (|u_n| + |v_n|) \\ &\leqslant N_1(u) + N_2(u). \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{N_1 \text{ est une norme sur } \ell^1(\mathbb{K}).}$$

**2.** Soit $u \in \ell^1(\mathbb{K})$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, |u_k| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = N_1(u).$$

Donc $u$ est bornée. On a montré que :

$$\boxed{\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K}) \text{ et } \forall u \in \ell^1(\mathbb{K}), N_\infty(u) \leqslant N_1(u).}$$

Montrons que le normes ne sont pas équivalentes :
on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $u_n = (u_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, u_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k < n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $u_n$ est nulle à partir du rang $n$, donc $u_n \in \ell^1(\mathbb{K})$ et $N_1(u) = n$. Donc la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\ell^1(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée dans l'espace vectoriel normé $(\ell^1(\mathbb{K}), N_1)$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}, N_\infty(u) = 1$, donc la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\ell^1(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace vectoriel normé $(\ell^1(\mathbb{K}), N_\infty)$.

$$\boxed{\text{Les normes } N_1 \text{ et } N_\infty \text{ ne sont pas équivalentes sur } \ell^1(\mathbb{K}).}$$

## Problème : matrices «toutes-puissantes»

**1. a)** Si $a \in T_1(\mathbb{R})$ en particulier il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a$ donc $a \geqslant 0$. Réciproquement si $a \geqslant 0$ alors, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $b^n = a$ avec $b = \sqrt[n]{a}$.

Donc

$$\boxed{T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[.}$$

**b)** les racines $n$-ièmes du nombre complexe $b$ sont les $\sqrt[n]{r}\exp(i\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})$ avec $k \in [\![0\,;n-1]\!]$.

**c)** 0 est TP $\mathbb{C}$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0^n = 0$) ainsi que tout complexe non nul d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.}$$

**2. a)** Si $A \in T_p(\mathbb{K})$, pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.

Donc : $\det A = (\det B)^n$ donc $\det A \in T_1(\mathbb{K})$ puisque $\det B \in \mathbb{K}$.

On a montré que

$$\boxed{\text{Démontrer que si } A \in T_p(\mathbb{K}), \text{ alors } \det A \in T_1(\mathbb{K}).}$$

**b)** Il en résulte par exemple que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$, d'après la question 1) a), puisque $\det A < 0$.

**3.** Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car la matrice $A$ proposée est bien à déterminant positif mais n'est pas toute puissante.
En effet s'il existait une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, on aurait (avec les notations de l'énoncé) :

$$\begin{cases} a^2+bc=-1 \\ d^2+bc=-2 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \end{cases}$$

(1) implique que $b$ et $c$ sont non nuls.
(3) et (4) impliquent alors que $a+d=0$ donc $a^2=d^2$.

Les équations (1) et (2) sont alors incompatibles.

**4. a)** En remplaçant la première colonne $C1$ du determinant caractéristique par $C1+C3$ on peut factoriser par $\lambda-2$. Puis en remplaçant la troisième ligne $L3$ par $L3-L1$ on se ramène à un déterminant d'ordre 2 .
Il vient ainsi que $\chi_A(\lambda)=(\lambda-2)\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.
Il en découle que $A$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2=2$.
Or le système $AX=2X$ se réduit à $2x-3y-2z=0$ donc $E_2$ est le plan engendré par exemple par $\overrightarrow{\varepsilon_1}=(1,0,1)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2}=(0,2,-3)$ et

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.}$$

**b)** Un calcul immédiat prouve que la droite $E_1$ est engendrée par $\overrightarrow{\varepsilon_3}=(1,1,-1)$.

Notons $P$ la matrice de passage de la base canonique à la base diagonalisante $(\overrightarrow{\varepsilon_1},\overrightarrow{\varepsilon_2},\overrightarrow{\varepsilon_3})$ et $D=\operatorname{diag}(2,2,1)$ de sorte que $A=PDP^{-1}$.
Pour $n\geqslant 1$ soit $B_n=PD_nP^{-1}$ avec $D_n=\operatorname{diag}(\sqrt[n]{2},\sqrt[n]{2},1)$. Alors $B_n^n=A$ donc

$$\boxed{A \text{ est TPR.}}$$

**c)** $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. La calculatrice fournit $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ainsi que

$$B_2=\begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -3+4\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ -2+2\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

et

$$B_3=\begin{pmatrix} 2-\sqrt[3]{2} & -3+3\sqrt[3]{2} & -2+2\sqrt[3]{2} \\ 2-2\sqrt[3]{2} & -3+4\sqrt[3]{2} & -2+2\sqrt[3]{2} \\ -2+2\sqrt[3]{2} & 3-3\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$$

**5.** $A$ est est la matrice de l'homothétie de rapport -1 donc de la rotation d'angle $\pi$. De sorte que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $B_n^n=A$ avec $B_n=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{n} & -\sin\frac{\pi}{n} \\ \sin\frac{\pi}{n} & \cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$ et

$$\boxed{A \text{ est TPR.}}$$

**6.** Soit $N\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ nilpotente.

**a)** Il existe $r\geqslant 1$ tel que $N^r=0$ donc $X^r$ annule $N$ de sorte que 0 est la seule valeur propre complexe de $N$. Ainsi $\chi_N=X^p$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\boxed{N^p=0.}$$

**b)** Supposons que $N$ est TPK, en particulier il existe $B$ telle que $B^p=N$ donc $B^{p^2}=N^p=0$ de sorte que $B$ est nipotente et donc $B^p=0$ i.e. $N=0$.

On a montré que

$$\boxed{\text{si } N \text{ est TP}\mathbb{K}\text{, alors } N \text{ est la matrice nulle.}}$$

**7.** Comme les $\lambda_i$ pour $i$ de 1 à k sont deux à deux distincts, les polynômes $(X-\lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, donc d'après le théorème de décomposition des noyaux :

$$\operatorname{Ker}(\chi_A(u))=C1\oplus\cdots\oplus C_k$$

et d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(u)=\chi_u(u)=0$, donc :

$$\boxed{\mathbb{K}^p=C1\oplus\cdots\oplus C_k.}$$

**8. a)** Si $v$ commute avec $u$ alors $v$ commute avec $Q(u)$ donc $\operatorname{Ker}Q(u)$ est stable par $v$.

**b)** $u$ commute avec $u-\lambda_i$ id et en appliquant la question précédente (avec $v=u,u=u-\lambda_i\mathrm{id}$ et $Q=X^{r_i}$ ), il vient que

$$\boxed{C_i \text{ est stable par } u.}$$

**9.** Comme $C_i$ est stable par $u$ donc par $u-\lambda_i$ id, il vient pour tout $x\in C_i$ : $(u_{C_i}-\lambda_i\,\mathrm{id}_{C_i})^{r_i}(x)=(u-\lambda_i\mathrm{id})^{r_i}(x)=0$. Donc $(u-\lambda_i\mathrm{id})^{r_i}=0$, donc

$$\boxed{(u-\lambda_i\mathrm{id}) \text{ est un endomorphisme de } C_i \text{ nilpotent.}}$$

**10.** Ainsi $u_{C_i}=\lambda_i\mathrm{id}_{C_i}+v_i$ où $v_i$ est un endomorphisme nilpotent de $C_i$.

Dans toute base de $C_i$ la matrice de $u_i$ est donc de la forme $A_i'=\lambda_i\,\mathrm{Id}_{p_i}+N_i$ avec $N_i$ nilpotente.
Soit $\mathcal{B}'$ une base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p=C_1\oplus C_2\oplus\ldots\oplus C_k$, alors la matrice de $u$ dans $\mathcal{B}'$ est donc $A'=\operatorname{diag}(A_1',A_2',\ldots,A_k')$. On pose $P$ la matrice de $\mathcal{B}'$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ ; d'après la formule de changement de base :

$$\boxed{A=P\operatorname{diag}(\lambda_1I_{p_1}+N_1,\ldots,\lambda_kI_{p_k}+N_k)\,P^{-1}}$$

**11.** Supposons $A_i'$ TPK pour tout $i$ de 1 à $k$ et soit $n\geqslant 1$ un entier quelconque.

Pour tout $i$, il existe $B_i'\in\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $(B_i')^n=A_i'$.
Alors $(B')^n=A'$ par calcul par blocs avec $B'=\operatorname{diag}(B_1',B_2',\ldots,B_n')$ donc $B^n=A$ avec $B=PB'P^{-1}$.
Ainsi $A$ est bien TPK.

**12. a)** Si $V$ est le polynôme nul on a bien $V = X^pQ$ avec $Q$ le polynôme nul.

Sinon notons $k$ la valuation de $V$ : $V = a_kX^k + a_{k+1}X^{k+1} + \ldots + a_mX^m$ avec $a_k \neq 0$. Alors $V(x) \sim a_kx^k$ au voisinage de 0 de sorte que $x^k = o(x^p)$ ce qui entraîne $k > p$. Donc, dans tous les cas

$$\boxed{\text{il existe un polynôme } Q \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que } V = X^pQ.}$$

**b)** Notons $U(x) = 1 + \frac{1}{n}x + \ldots + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{n}-p+1\right)}{p!}x^p$ de sorte que $(1+x)^{1/n} = U(x) + o(x^p)$.

De plus $U(x) \sim 1$, donc $1 + x = (U(x) + o(x^p))^n = U(x)^n(1 + o(x^p))^n = U(x)^n(1 + o(x^p)) = U(x) + o(x^p)$.

Donc :

$$\boxed{1 + x = U(x) + o(x^p).}$$

**c)** $1+X-U(X)^n$ est un polynôme, et $1+x-U(x)^n = o(x^p)$, donc d'après la question 12.a,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe un polynôme } Q \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que :}\\[2mm] 1 + X = U^n + X^p \times Q\end{array}}$$

**13. a)** Soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque. Avec les notations de la question précédente : $(1 + X)(N) = U(N)^n + N^pQ(N)$ par le classique morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Or $N^p = 0$ par la question 6)a).
Ainsi $\mathrm{Id} + N = U(N)^n$ donc

$$\boxed{\mathrm{Id} + N \text{ est TPK.}}$$

**b)** Soit $\lambda$ non nul. Il vient $\lambda \,\mathrm{Id}_p + N = \lambda\,(\mathrm{Id}_p + N')$ avec $N' = \frac{1}{\lambda}N$ clairement nilpotente.

Par la question précédente, il existe $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $(B')^n = \mathrm{Id}_p + N'$.
Si $\lambda$ est en outre TPIK, il existe $\lambda'$ tel que $(\lambda')^n = \lambda$ et $B^n = \lambda \,\mathrm{Id}_p + N$ avec $B = \lambda' B'$ et

$$\boxed{\lambda \,\mathrm{Id}_p + N \text{ est TPK.}}$$

**14. a)** Si$A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ alors, par la question 10), $A$ est semblable à une matrice $B = \mathrm{diag}\,(A'_1, A'_2, \ldots, A'_k)$ avec
$A'_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{p_i} + N_i$ où les matrices $N_i$ sont nilpotentes et $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ est l'ensemble des valeurs propres de $A$.
Si $A \in GL_p(\mathbb{C}), \lambda_i \neq 0$ donc $\lambda_i$ est TP$\mathbb{C}$ (question 1 c ) donc $A'_i$ est TP$\mathbb{C}$ par la question précédente.
La question 11) prouve alors que $A$ est TP$\mathbb{C}$

$$\boxed{\text{toute matrice inversible de } \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ est TP}\mathbb{C}.}$$

**b)** La question 6)b) prouve qu'une matrice nilpotente non nulle n'est pas TPC.

**15.** Exemple 1 :

Soit la matrice d'ordre 4 diagonale par bloc d'ordre 2 : $A = \mathrm{diag}(R, (0))$ où $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le polynôme caractéristique de $A$ est (matrice triangulaire) $X^2\left(X^2 + 1\right)$ donc $A$ est non inversible ( 0 est valeur propre) et non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (polynôme caractéristique non scindé sur $\mathbb{R}$ ). Cependant $A$ est TPR car, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \mathrm{diag}\,(R_n, (0))$ où $R_n$ est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2n}$ : $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) \end{pmatrix}$

Exemple 2 où $A$ n'est même pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (elle l'est dans l'exemple précédent) :

Remplaçons dans l'exemple précédent $R$ par la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le spectre de $A$ est $(1, 1, 0, 0)$ mais le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $e_1$ ce qui prouve que $A$ est non inversible et non $\mathbb{C}$-diagonalisable.

Or $S = \mathrm{Id}_2 + N$ avec $N$ nilpotente car $N^2 = 0$. Par la question 13)b), il existe $S_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S_n^n = S$. Alors $B_n^n = A$ avec $B_n = \mathrm{diag}\,(S_n, (0))$