Chapitre 4 : Nombres complexes - Partie 1
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Déterminez les parties réelles et imaginaires des complexes suivants :

$$x = (1+i)^3 \qquad y = \frac{1-4i}{1+5i} \qquad z = \frac{1-4i}{1+5i} + \frac{1+4i}{1-5i} \qquad v = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} \qquad w = \frac{(1+i)^2}{1-i}$$

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnues z (et z') dans $\mathbb{C}$:

1. $z + 3iz = 4 + i - z$
2. $\dfrac{(1+i\sqrt{2})z+1}{i+3-z} = 3$
3. $z^2 + z + 1 = 0$
4. $z^2 + z - 1 = 0$
5. $4z^2 - 10z + 4 = 0$
6. $\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0$
7. $(1-i)z - 3i\bar{z} = 1 + 4i$
8. $\begin{cases} z + z' &= 1 + 4i \\ z - z' &= 1 - 2i \end{cases}$

Exercice 3 :

Soient $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ et $z \in U \setminus \{1\}$. Montrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pure.

Exercice 4 :

Calculer les racines carrées complexes des nombres suivants :

$A = \ -50 \qquad B = \ 2i \qquad C = \ 8 - 6i \qquad D = \ 24 - 10i.$

1. A est un réel négatif, on peut donner directement les racines carrés complexes de A, qui sont $i\sqrt{50}$ et $-i\sqrt{50}$, ou encore $i5\sqrt{2}$ et $-i5\sqrt{2}$.
2. On cherche z telle que $z^2 = 2i$, avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   Comme $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ on en déduit $x^2 - y^2 = 0$ et $2xy = 2$.
   De plus, $|z|^2 = |z^2| = |2i| = 2$ donc $x^2 + y^2 = 2$.
   On déduit de ces trois équations que $x^2 = 1$, $y^2 = 1$ et $xy \geq 0$, d'où deux racines complexes possibles :
   $$z = 1 + i \text{ et } z = -1 - i$$
3. La même technique donne $x^2 - y^2 = 8, xy < 0$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{64+36} = 10$
   d'où les deux racines :
   $z = 3 - i$ ou $z = -3 + i$
4. Cette fois $x^2 - y^2 = 24$, $xy < 0$ et $x^2 + y^2 = \sqrt{576} = 26$
   d'où $z = 5 - i$ ou $z = -5 + i$

Exercice 5 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1) \qquad iz^2 + (i+3)z + 2 - 2i = 0.$$

$$(2) \qquad z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0.$$

$$(3) \qquad z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = 0$$

(on cherchera une solution imaginaire pure)

1. c'est un polynôme du second degré à coefficient complexe. Le discriminant est $\Delta = -2i$.
   On cherche δ tel que $\delta^2 = -2i$. Avec la méthode de l'exercice 4 on trouve $\delta = 1 - i$ ou $\delta = -1 + i$.
   D'où les deux solutions de l'équation (1) :
$$z = \frac{-i-3+1-i}{2i} = \frac{-1-i}{i} = -1+i \text{ ou } z = \frac{-i-3-1+i}{2i} = 2i$$
2. A nouveau, on calcule le discriminant et on trouve $\Delta = -75 - 100i$
   Pour la recherche de $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on a
$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = -75 \\ 2xy & < 0 \\ x^2 + y^2 & = 125 \end{cases}$$
   $L_1 + L_3$ donne $2x^2 = 50$, donc $x = 5$ ou $x = -5$
   $L_3 - L_1$ donne $2y^2 = 200$ d'où $y = 10$ ou $y = -10$.
   de $xy < 0$ on déduit enfin que
$$\delta = -5 + 10i \text{ ou } \delta = 5 - 10i$$
   D'où les solutions de l'équation (2)
$$z = -2i \text{ ou } z = 5 - 12i$$
3. Cherchons une solution sous la forme $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}$.
   Un tel z est solution si
$$-b^3 i + (5+3i)b^2 + (7+16i)bi + 3 - 21i = 0,$$
$$\text{c'est-à-dire si } 5b^2 - 16b + 3 + i(-b^3 + 3b^2 + 7 - 21) = 0$$
   Il faut donc $5b^2 - 16b + 3 = 0$ et $-b^3 + 3b^2 + 7 - 21 = 0$. La première équation donne $b = 3$ ou $b = \frac{1}{5}$, et seul $b = 3$ convient pour la deuxième.
   On peut donc factoriser l'expression par $z - 3i$.
   On cherche donc β tel que
$$z^3 - (5+3i)z^2 + (7+16i)z + 3 - 21i = (z-3i)(z^2 + \beta z + i + 7)$$
   En développant et en identifiant, on trouve $\beta = -5$
   On cherche donc maintenant les racines de $z^2 - 5z + i + 7$
   Le discriminant vaut $\Delta = -3 - 4i$, dont les racines sont $\delta = 1 - 2i$ ou $\delta = -1 + 2i$.
   On a donc comme racine $z = 3 - i$ ou $z = 2 + i$
   Finalement
$$(3) \Leftrightarrow z = 3i \text{ ou } z = 3 - i \text{ ou } z = 2 + i$$

Exercice 6 :

Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{3z - i}{i + z}$.

1. (a) Montrez que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $f(z) \neq 3$.
   (b) Soit $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et de paramètre y :
$$f(z) = y$$
   (c) En déduire que f est bijective de $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{3\}$ et déterminez $f^{-1}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{C} \setminus \{3\}$.
2. (a) Déterminez l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie $f(z) \in \mathbb{R}$. On pourra écrire que $z = x + iy$ avec x et y réel.
   (b) Même question avec l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z)$ est un imaginaire pur.