Algèbre Chapitre 5 : Calcul matriciel
Feuille d'exercices

Exercice 1 :

Soient les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculez lorsque c'est possible les expressions suivantes :

$$A^2, AB, BA, AE, EA, ED, DE, BD, CD, A(BC)D, (-A+2E)B$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 8 & 15 \end{pmatrix}, \quad BA : \text{dimensions incompatibles}$$

$$AE = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad EA = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad ED \text{ et } DE : \text{ dimensions incompatibles}$$

$$BD = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad CD = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(-A+2E)B = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -11 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad A(BC)D = (AB)(CD) = \begin{pmatrix} 70 \\ 142 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Calculer tous les produits de deux matrices différentes possibles.

Il y a 6 produits possibles :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \quad AD = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 \\ 5 & -8 & 1 \end{pmatrix} \quad BD = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Trouvez toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 :

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A et B sont triangulaires supérieures.

1. Montrez que $A + B$ et AB sont également triangulaires supérieures.
2. Sans refaire les calculs, montrez que si A et B sont triangulaires inférieures, $A + B$ et AB sont également triangulaires inférieures.

Exercice 6 :

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant B, calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer C^n avec $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculez la puissance n-ème de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et en déduire la puissance n-ème de la matrice $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$:

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n-1} & u_n \\ u_n & u_{n+1} \end{pmatrix}$$

   On précisera la relation liant pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
2. A partir du calcul de A^{2n}, déterminez une relation entre u_{2n}, u_{n-1}, u_n et u_{n+1}.

Exercice 9 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculez PS et SP. En déduire que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = S$.
2. Calculez $D = P^{-1}AP$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculez D^n.
4. Montrez que pour tout n, on a la formule

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

5. En déduire A^n.

Exercice 10 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

1. Calculez $M^2 + M - 2I_3$.
2. En déduire que M est inversible et préciser son inverse.

Exercice 11 :

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. En déduire A^{-1}.

Exercice 12 :

Soit A et B deux matrices symétriques. AB est-elle nécessairement symétrique ? Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle le soit.

Exercice 13 :

Pour toute matrice carrée M, on appelle trace de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M.
Dans tout l'exercice, n et p désigne des entiers naturel non nul.

1. Pour $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, exprimer $\mathrm{tr}(M)$ à l'aide d'un signe somme.
2. Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A).$$

3. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrer que : $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(B \times A)$.
   En déduire que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

4. A-t-on $\mathrm{tr}(A \times B) = \mathrm{tr}(A) \times \mathrm{tr}(B)$ pour tout couple de matrices carrées (A, B) ?
5. Peut-on trouver des matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$? Si oui, les préciser.
6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   Existe-t-il une matrice P inversible telle que $B = P^{-1}AP$?
7. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que

$$A \times B = I_n \text{ et } B \times A = I_p.$$

   Montrer les matrices A et B sont carrées (i.e. $n = p$).