

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ET DES MATRICES CARRÉES

Exercices

1 Déterminer les éléments propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

2 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 Soit E l'espace des suites réelles convergeant vers 0 et $\Delta : E \rightarrow E$ l'endomorphisme qui à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n.$$

Déterminer les valeurs propres de Δ .

4 Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ défini par $\varphi(M) = M^T$.

Déterminer un polynôme annulateur de φ et en déduire les éléments propres de φ .

5 Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $L(P) = X^3 P\left(\frac{1}{X}\right)$.

Déterminer la matrice de L dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Donner les éléments propres de L .

6 Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tel que tout vecteur non nul en est vecteur propre. On souhaite montrer que u est une homothétie vectorielle.

1. Montrer que pour tout $x \in E$ non nul, il existe un scalaire λ_x tel que $u(x) = \lambda_x x$.

2. Comparer λ_x et λ_y pour x et y deux vecteurs non nuls.

On pourra considérer les cas : la famille (x, y) est liée et la famille (x, y) est libre.

3. Conclure.

7 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$. Montrer que λ est une valeur propre de $v \circ u$.

2. Montrer que cette propriété reste valable pour $\lambda = 0$ si E est de dimension finie.

3. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P \in E$, $u(P) = P'$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(P)(x) = \int_0^x P(t) dt$.

Calculer le noyau de $u \circ v$ et celui de $v \circ u$. Conclusion ?

8 Matrices stochastiques

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que pour tout $(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $a_{i,j} \geq 0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que $1 \in \text{Sp}(A)$.
 2. Justifier que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A alors $|\lambda| \leq 1$.
 3. On suppose de plus que tous les coefficients de A sont non nuls.
Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A qui vérifie $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.
-

9 Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En multipliant à droite et à gauche la matrice $\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ par des matrices triangulaires par blocs bien choisis, montrer l'égalité des polynômes caractéristiques :

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

10 Soit $(A, B, C, D) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^4$ tel que $AC = CA$.

On souhaite montrer que $\det \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} = \det(DA - BC)$.

1. On suppose dans cette question que A est inversible.
Effectuer le produit par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}C \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et en déduire le résultat souhaité.
 2. On revient au cas général.
 - (a) Montrer que pour p assez grand, la matrice $A_p = A + \frac{1}{p}I_n$ est inversible.
 - (b) Montrer que si $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ convergeant vers M alors la suite $(\det(M_p))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers $\det(M)$.
 - (c) Conclure.
-

11 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$. On admet que $A^4 - 3A^3 + 4A = 0_3$.

Déterminer les valeurs propres de A .

12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ avec $\alpha \neq \beta$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) = 0_n$.

On suppose que A n'est pas un multiple de I_n .

Montrer que $\text{Sp}(A) = \{\alpha, \beta\}$.

13 Déterminer un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

On suppose que A est inversible. Déterminer A^{-1} .

14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

1. Montrer que A^{-1} est un polynôme en A .
Application : Montrer que si A est triangulaire supérieure alors A^{-1} est triangulaire supérieure.
2. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, A^k est triangulaire supérieure.

15 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables/trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Si oui, les diagonaliser/trigonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

16 Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tels que $|a| \neq |b|$.

On considère $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$).

1. Justifier que A est diagonalisable.
 2. Calculer le rang de A . En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
 3. Déterminer deux vecteurs propres associés à deux autres valeurs propres et diagonaliser A .
-

17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note P_n son polynôme caractéristique.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R} : P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$.
Calculer P_1 et P_2 .
 2. Soit $x \in]-2, 2[$. On pose $x = 2 \cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \pi[$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}$.
 3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n admet n racines et que A_n est diagonalisable.
-

18 *Matrices compagnons*

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On appelle *matrice compagnon du polynôme P* la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique de M .
(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de M .
Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ .
(c) À quelle condition M est-elle diagonalisable ?

2. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n . Un endomorphisme u de E est dit *cyclique* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
 - (a) Montrer qu'un endomorphisme u est cyclique si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est une matrice compagnon.
 - (b) Donner qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme cyclique soit diagonalisable.
-

19 *Matrices de rang 1*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes U et V non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $M = UV^T$.
2. Déterminer un polynôme annulateur de M .
3. Montrer alors les équivalences :

$$M \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{tr}(M) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \text{Ker}(M) \oplus \text{Im}(M).$$

20 Soit $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
 2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $A = 0_n$.
-

21 Soit p un endomorphisme de E , $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, tel que p^2 soit un projecteur.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?
 2. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.
-

22 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = AM$.

1. Montrer que si $A^2 = A$ alors f est diagonalisable.
 2. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
-

23 *Matrices nilpotentes*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On dit que la matrice A est *nilpotente* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_n$.

1. On suppose que A est nilpotente.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A = 0_n$.
 2. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(A^k) = 0$.
-

24 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

25 *Déterminant circulant*

On souhaite calculer le *déterminant circulant* $\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}$.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on pose $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k$.

1. Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Montrer que $\Delta = \det(Q(A))$.
3. En déduire que $\Delta = \prod_{p=0}^{n-1} Q(e^{2ip\pi/n})$.

26 *Deux applications de la diagonalisation*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Déterminer $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ inversible et $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
2. *Application 1 : détermination du commutant*
Déterminer toutes les matrices qui commutent avec A .
3. *Application 2 : résolution d'une équation matricielle*
On souhaite déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 = A$.
Soit $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 = A$.
On note φ_X (respectivement φ_A) l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à X (respectivement à A).
(a) Montrer que les sous-espaces propres de φ_A sont stables par φ_X .
(b) En déduire que tout vecteur propre de φ_A est un vecteur propre de φ_X .
(c) Montrer que la matrice $P^{-1}XP$ est diagonale.
Quelles sont les valeurs possibles de ses coefficients diagonaux ?
En déduire l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $X^2 = A$.

27 Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle.

Soit u et v deux endomorphismes de E . On suppose que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun.
2. Montrer alors qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont triangulaires supérieures.

28 Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent.

Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

29 Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?