Algèbre - Chapitre 6

Nombres complexes

- Partie 2 : Forme trigonométrique et exponentielle - Géométrie

I Nombres complexes de module 1

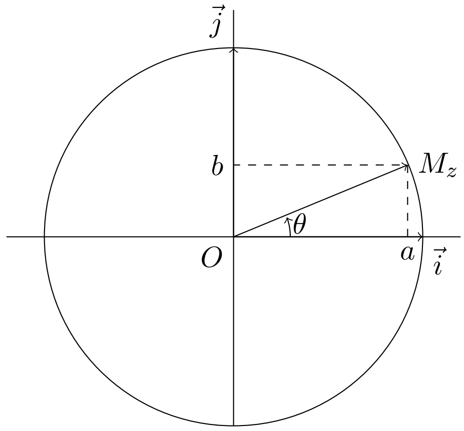
1) La notation d'Euler

a) Construction

Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib$ tel que $|z| = 1$ (c'est à dire, $z \in \mathbb{U}$).
Soit M_z le point d'affixe z, alors M_z est sur le cercle centré en 0 et de rayon 1 :



Il existe donc une mesure d'angle θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Définition : notation d'Euler

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Le raisonnement précédent montre que si $z \in \mathbb{U}$, alors il existe θ tel que $z = e^{i\theta}$, mais la réciproque est vraie aussi.

En effet, comme pour tout réel θ, $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, tout complexe $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Autrement dit :

Proposition 1 :

$$z \in \mathbb{U} \iff \exists \theta \in \mathbb{R}; z = e^{i\theta}$$

De plus,

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$$

Exemples :

- $1 =$
- $-1 =$
- $i =$
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i =$

b) Formules immédiates :

Proposition 2 :

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{i\theta} \times e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}} \qquad \text{et} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\varphi}} = e^{i(\theta-\varphi)}$$

▷ *Preuve* :

◁

Proposition 3 : Formule de Moivre

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

ou encore :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

▷ *Preuve* : C'est en fait un corollaire de la proposition précédente : si $n \geq 0$, on procède par récurrence en utilisant dans l'hérédité le fait que $\left(e^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(e^{i\theta}\right)^n e^{i\theta} = e^{in\theta}e^{i\theta} = e^{i(n+1)\theta}$.
Si $n < 0$, on passe à l'inverse via la relation $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$. Ainsi :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-n} = \left(e^{-i\theta}\right)^{-n} \underset{-n>0}{=} e^{-i\theta\times(-n)} = e^{in\theta}$$

◁

Remarquons enfin qu'on peut revenir à la trigonométrie via les formules dites "d'Euler" :

Proposition 4 : Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

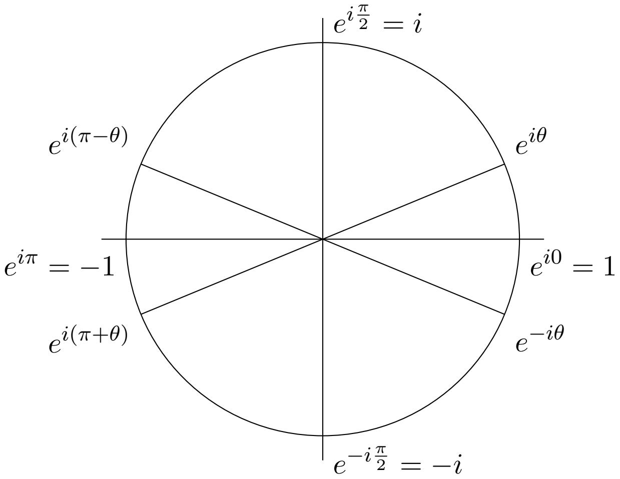
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

▷ *Preuve* : c'est juste une vérification :

◁

c) Représentation géométrique :

On retrouve naturellement les propriétés géométriques vues dans le chapitre "trigonométrie" :



En particulier, ce dessin illustre bien que $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$ et que $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

2) Application à la trigonométrie :

a) Retrouver les formules d'addition :

Méthode : **RETROUVER LES FORMULES D'ADDITIONS**

Pour retrouver $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, on peut écrire que

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)).$$

En développant et en identifiant partie réelle et imaginaire, on retrouve les formules connues.

b) Technique de l'angle moitié :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère l'expression $1 + e^{i\theta}$.

Une technique utile pour étudier cette expression est de factorisant par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ ("l'angle moitié"), il vient :

$$1 + e^{i\theta} =$$

On peut utiliser la même technique de calcul avec $1 - e^{i\theta}$ (ce qui fournira un $i\sin(\theta)$)
De manière générale :

Méthode : **TECHNIQUE DE L'ANGLE MOITIÉ**

Pour tout $p, q \in \mathbb{R}$, on peut factoriser une expression de la forme $e^{ip} \pm e^{iq}$ en mettant en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$.
Les formules d'Euler permettent alors de simplifier l'expression.

Exemple à connaitre :
On peut via cette technique retrouver les formules de factorisation en trigonométrie :

c) Linéarisation

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors on peut écrire $\cos^n(t)$ et $\sin^n(t)$ comme combinaison linéaire de $\cos(kt)$ et $\sin(kt)$ avec différentes valeurs de $k \in [\![0, n]\!]$.
On dit alors qu'on a linéarisé l'expression.

Méthode : **Linéarisation de $\cos^n t$ et $\sin^n t$:**

Il suffit d'utiliser les formules d'Euler.
Ainsi $\cos^n(t) = \left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^n$ et $\sin^n(t) = \left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^n$.
On développe ensuite via le binôme de Newton et la formule de Moivre le résultat tombe en appliquant à nouveau les formules d'Euler.

Exemple :
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin^3(t) =$

d) Expression de $\sin(nt)$ ou $\cos(nt)$ en fonction de puissances de $\cos$ ou $\sin$:

C'est l'opération inverse de la précédente, et la méthode est très proche :

Méthode : $\sin(nt)$ OU $\cos(nt)$ EN FONCTION DE PUISSANCES DE $\cos$ OU $\sin$

L'astuce est de traiter simultanément les deux expressions et d'utiliser Moivre.
En effet, $\cos(nt) + i\sin(nt) = e^{int} = \left(e^{it}\right)^n$
La formule d'Euler permet alors d'écrire $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ et on développe ensuite via le binome de Newton.
Il reste a identifier la partie réelle et la partie imaginaire pour conclure.

Exemple :
Appliquons cette méthode à $\cos(3t)$:

II Notation trigonométrique et exponentielle

1) Argument d'un nombre complexe, notations :

a) Représentation polaire :

Considérons $z \neq 0$, $z = a + ib$ avec a et b réels, et soit $z' = \dfrac{z}{|z|}$.

Alors $|z'| =$

Autrement dit $z' \in$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z' = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
Géométriquement, on a en fait :

Comme $z' = \dfrac{z}{|z|}$, on a donc

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z|e^{i\theta}$$

A noter : **COORDONNÉES POLAIRES**

Si on considère le point M d'affixe $z = a + ib$, (a, b) constituent les coordonnées dites "cartésiennes" de M.

En écrivant $z = re^{i\theta}$ comme dans la construction précédente, on obtient un autre repérage du point M : sa distance à 0 (c'est à dire r) et l'angle formé par rapport à l'axe des abscisses (θ).

On dit alors que le couple (r, θ) sont **les coordonnées polaires** de M.
Cette façon de repérer le point M s'avèrera très utile en mécanique (aussi bien physique qu'en SI).

b) Définition

Définition :

- On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe $z \neq 0$ toute écriture de la forme

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ où } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

- On appelle **forme exponentielle** d'un complexe tout écriture de la forme

$$z = r(e^{i\theta}) \text{ où } r > 0 \text{ et } \theta \in \mathbb{R}$$

- Dans ces deux définitions, on dit que θ est **un argument** de z.
  On appelle **argument principal de** z l'unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ qui convient.

Propriété 1 :

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul et soit $z = re^{i\theta}$ son écriture exponentielle.
Alors :

$$\begin{cases} r &= |z| \\ \cos\theta &= \dfrac{a}{|z|} \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

▷ *Preuve* :
C'est exactement ce qu'on a fait dans la partie "construction", ce qu'illustre le dessin suivant :

◁

Danger !

- Lorsque l'on utilise la notation trigonométrique ou exponentielle, r est toujours supposé strictement positif. Si on tombe avec un $r < 0$, il faudra alors jouer avec les propriétés de sin et cos.

- Pour 0, on a $|0| = 0$ et donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $0 = 0e^{i\theta}$. On ne parlera donc pas d'écriture trigonométrique pour 0 et 0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Exemple :

1. $z = -2i$ a pour module et argument :

$$-2i =$$

2. Ecrivons $z = 1 + i$ sous la forme exponentielle :

c) (Presque) unicité d'écriture :

Theorème 1 :
Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à $2k\pi$ près, autrement dit :
Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux complexes, avec r et r' dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$z = z' \iff r = r' \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi$$

▷ *Preuve* : provient directement de l'unicité de l'écriture algébrique et des propriétés de périodicité de cos et sin. ◁

d) Module et argument d'un produit, d'une puissance, d'un quotient :

L'écriture sous forme exponentielle permet de montrer des formules très facilement grâce aux propriétés montrées dans le I de ce chapitre :

Propriété 2 :
Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ de module r et r', admettant pour argument θ et θ'.

- zz' a pour module rr' et admet pour argument $\theta + \theta'$.
- $\dfrac{z}{z'}$ a pour module $\dfrac{r}{r'}$ et admet pour argument $\theta - \theta'$
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, z^n a pour module r^n et admet pour argument $n\theta$.

▷ *Preuve* : Tout va très vite en écrivant que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$:

-

▶

▶

◁

2) Racines n-ème complexes :

a) Racines n-ème de l'unité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut résoudre l'équation suivante :

$$z^n = 1$$

Définition :

On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe vérifiant $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ème de l'unité.

Proposition 5 :

Soit $n \geq 1$. On note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

Alors

$$\mathbb{U}_n = \{\omega_k ; k \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}$$

Exemples :

$\mathbb{U}_2 =$ $\mathbb{U}_3 =$

$\mathbb{U}_4 =$

Interprétation géométrique :

b) Racine n-ième d'un complexe quelconque non nul :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.
On cherche à résoudre l'équation

$$z^n = a$$

On va procéder de la même façon que pour $a = 1$, mais on va prendre un raccourci :

Theorème 2 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a un complexe non nul, de module ρ et d'argument α.
L'équation $z^n = a$ admet n solutions, appelées racines $n-$ième complexes de a, qui sont

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

avec $k \in [\![0, n-1]\!]$

Exemple :
Résoudre $z^5 = 1 + i$:

3) L'exponentielle complexe

a) Définition

On cherche à prolonger la fonction exponentielle à $\mathbb{C}$, en conservant le plus de propriétés possibles de la fonction exponentielle telle qu'elle existe chez les nombres réels.

Définition :
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec a et b réels).
On définit e^z par

$$e^z = e^a e^{ib}.$$

Exemple :
$e^{3+4i} = e^3 e^{4i} = e^3(\cos 4 + i \sin 4)$

Remarque :
Il s'agit bien d'un prolongement à $\mathbb{C}$ de la fonction exponentielle :
Prenons $x \in \mathbb{R}$.
Alors $x = a + ib$ avec $a = x$ et $b = 0$.
Ainsi, son exponentielle complexe est

$$e^x = e^a e^{i0} = e^a \times 1 = e^x \text{(au sens réel)}$$

Les fonctions coïncident bien sur l'ensemble des réels.

b) Propriétés

La plupart des propriétés de calcul de l'exponentielle réelle sont encore vraies :

Propriété 3 :
$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}$, on a

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad \frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'} \quad (e^z)^n = e^{nz}$$

▷ *Preuve* : On utilise les propriétés montrées dans la partie I de ce chapitre.
Par exemple pour $e^z e^{z'}$:

◁

De par sa définition, le module et un argument de e^z où $z \in \mathbb{C}$ sont immédiats :

Propriété 4 :
Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $|e^z| = e^{Re(z)}$ et un argument de e^z est $Im(z)$

▷ *Preuve* :
On a $e^z = e^{Re(z)}e^{iIm(z)}$ avec $e^{Re(z)} > 0$ et $Im(z) \in \mathbb{R}$.
Il s'agit donc bien d'une écriture exponentielle, et donc $e^{Re(z)}$ est le module de e^z et $Im(z)$ est un argument.

◁

c) Non injectivité

Le prolongement perd néanmoins une propriété importante de l'exponentielle réelle : son injectivité...
En effet :

D'où la proposition :

Proposition 6 :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, alors

$$e^z = e^{z'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z - z' = 2ik\pi$$

En conséquence, on ne pourra pas définir de logarithme sur $\mathbb{C}$....

III Interprétation des complexes en géométrie :

1) Alignement et orthogonalité :

a) Rappels

Définition :

- On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont **colinéaires** si et seulement si $\vec{v} = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \vec{v}$
- On dit que trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux si et seulement si les mesures de l'angle formé par (u, v) sont congrues à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π.

On rappelle également la propriété suivante :

Propriété 5 :
Si A et B sont deux points du plan, de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B), alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$

b) Caractérisation via les complexes :

Considérons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, d'affixes respectives z et z'.

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires équivaut à dire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}$$

En terme d'affixes, cela équivaut à

$$z = \lambda z' \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit :

$$\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$$

Notons maintenant θ un argument de z et θ' un argument de z' : ce sont des mesures des angles $(\vec{i}, \vec{u})$ et $(\vec{i}, \vec{v})$, et donc une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\theta' - \theta$.

Or $\theta' - \theta$ est un argument de $\dfrac{z'}{z}$

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si un argument de $\dfrac{z'}{z}$ est congru à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π, ce qui équivaut à $\dfrac{z'}{z}$ est un imaginaire pur, ou encore $\dfrac{z}{z'}$ imaginaire pure.

Theorème 3 :

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixe respective z et z'. Alors

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}$
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z}{z'} \in i\mathbb{R}$

Corolaire 1 :

Soient A, B et C trois points du plans, d'affixes respectives a, b et c.
Alors

- A, B et C sont alignés si $\dfrac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$.
- le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} \in i\mathbb{R}$.

▷ *Preuve :*
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ on pour affixes respectives $z = b - a$ et $z' = c - a$: il reste à appliquer le théorème.

◁

2) Translation

a) Définition :

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application qui a tout point M associe l'unique point M' tel que $M\vec{M}' = u$

Exemple :
En pratique, il suffit d'ajouter aux coordonnées du point M les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Ainsi la translation de vecteur $(1,1)$ du point $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

b) Traduction complexe :

Propriété 6 :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et soit $b \in \mathbb{C}$ son affixe.
Alors la translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto z + b \end{aligned}$$

Exemples :

- La translation de vecteur $(1,1)$ est représentée par l'application :
- l'application $z \mapsto z + 3i - 2$ traduit la translation de vecteur $\vec{u} =$

3) Homothétie :

a) Définition :

Définition :

Soit C un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle homothétie de centre C et de rapport λ l'application qui a tout point M du plan associe l'unique M' tel que $\overrightarrow{CM'} = \lambda\overrightarrow{CM}$.

b) Traduction complexe

On se contente des homothéties de centre l'origine du repère, plus simples à traduire en terme de coordonnées.

Si $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors son image par l'homothétie de centre 0 et de rapport λ est $M'\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Si on raisonne sur les affixes, cela donne :

Proposition 7 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors l'homothétie de rapport λ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \lambda z \end{aligned}$$

4) Rotation

a) Définition :

Définition :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et C un point du plan.
On appelle rotation de centre C et d'angle θ l'application qui à tout point M du plan associe l'unique M' tel que

$$CM = CM' \text{ et } \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CM'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$$

b) Interprétation complexe

On se restreint aux rotations de centre l'origine du repère :
On a déjà vu que si A, B et C sont trois points du plan, d'affixes a, b et c, alors $\dfrac{c-a}{b-a}$ a pour argument la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

De plus, la longueur $|AB|$ est donnée par $|b-a|$.

Soit donc $\theta \in \mathbb{R}$ et M un point du plan, d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

Soit M' l'image de M par la rotation d'angle θ de centre l'origine, et notons z' son affixe.

On doit donc avoir :

Ce qui donne le résultat suivant :

Proposition 8 :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre O et d'angle θ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto e^{i\theta} z \end{aligned}$$

Exemples :

- La rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ de centre 0 est donnée par l'application :

- Soit $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
  Que représente l'application $z \mapsto jz$?

c) Généralisation

On peut maintenant se demander à quoi correspond la multiplication par $a \in \mathbb{C}$ quelconque :

Proposition 9 :

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et T la transformation du plan représentée par $z \mapsto az$.
Alors T est la composée de deux transformations : $T = H \circ R = R \circ H$ où

- H est
- R est

Remarques :
On peut poursuivre en considérant $z \mapsto az + b$, ce qui va ajouter une troisième transformation une fois les opérations précédentes effectuées : une translation, du vecteur $\vec{u}$ dont l'affixe est b.

Exemple :
A quelle transformation correspond l'application $z \mapsto (1+i)z - i + 2$?