Somme, Fonctions usuelles
DM 3

Exercice 1 (Somme des cubes)

Soit $n \in \mathbb{N}$. L'objectif est d'obtenir, sans utiliser de récurrence, la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} k^3$.

1. Que vaut $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4))$?
2. Développez à l'intérieur de la somme ci dessus pour obtenir un lien entre $(n+1)^4$, $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} k^3$ et n.
3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

---

1. On peut appliquer directement la formule de telescopage, ou décomposer en deux sommes et faire un glissement d'indice.

   On obtient $\sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)) = (n+1)^4$
2. Par le binôme de Newton, on a
$$(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$
   Ainsi
$$(n+1)^4 = \sum_{k=0}^{n}((k+1)^4 - k^4)) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\sum_{k=0}^{n} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$
3. Il reste juste à tout calculer :
$$(n+1)^4 = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$
   D'où
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}\big((n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)\big)\\ &= \frac{1}{4}\big((n+1)((n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1)\big)\\ &= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1\right)\\ &= \frac{1}{4}(n+1)n^2(n+1)\\ \sum_{k=0}^{n} k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Exercice 2 (un peu de trigonométrie hyperbolique)

1. a) Montrez que l'équation $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution (bien qu'elle soit calculable, il n'est pas nécessaire d'avoir l'expression exacte pour continuer cet exercice)
   b) Justifiez que la fonction $u : x \mapsto \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x$ est dérivable et montrez que pour tout réel x, $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}\, x \geq 0$
2. Soit $f : x \mapsto e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1$.
   a) Justifiez que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   b) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
3. Montrez que $1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}},$$
   puis que pour tout $x \in]0,1[$,
$$1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$
5. Conclure que $\forall x \in]0,1[$,
$$\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x)$$
6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geq 2$.
   On considère la somme
$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

a) Justifiez que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$,

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

b) En déduire que $\forall n \geq 2$,

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

c) Déterminer la limite de S_n quand $n \to +\infty$

---

1. a) Soit $g : x \mapsto 2\,\mathrm{sh}(x) + 1$.
   g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = 2\mathrm{ch}(x) > 0$, donc g est strictement croissante.
   Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = +\infty$ et que g est continue, on a $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   Ainsi la fonction $g : x \mapsto 2\,\mathrm{sh}(x) + 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'image de $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
   L'équation $2\,\mathrm{sh}(x) + 1 = 0$ admet donc une unique solution réelle.

   b) La fonction u est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables, et on a

   $$u'(x) = 2\,\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) + \mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(x)(2\,\mathrm{sh}(x) + 1)$$

   Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$, $u'(x)$ est du signe de $2\,\mathrm{sh}(x) + 1$, c'est à dire u décroissante sur $]-\infty, a]$, croissante sur $[a, +\infty[$
   Elle a donc un minimum en a, et ce minimum vaut $u(a) = \mathrm{ch}(a)^2 + \mathrm{sh}(a)$.
   Or $\mathrm{sh}(a) = -\dfrac{1}{2}$, et $\mathrm{ch}(a) \geq 1$ (1 est le minimum de ch), donc $\mathrm{ch}(a)^2 \geq 1$ et $u(a) \geq 1 - \dfrac{1}{2} > 0$.
   On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\mathrm{ch}^2(x) + \mathrm{sh}(x) > 0}$

2. a) Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$,f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable deux fois (et même une infinité en fait...)
   On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$

   $$f'(x) = \mathrm{ch}(x)e^{\mathrm{sh}(x)} - 1 \text{ et } f''(x) = \mathrm{sh}(x)e^{\mathrm{sh}(x)} + \mathrm{ch}^2(x)e^{\mathrm{sh}(x)} = (\mathrm{sh}(x) + \mathrm{ch}^2(x))e^{\mathrm{sh}(x)}$$

   b) D'après la question 1b et comme $e^{\mathrm{sh}(x)} > 0$, on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f' est strictement croissante.
   Or $f'(0) = 1e^0 - 1 = 0$, donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.
   La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$.

3. D'après l'étude précédente, f admet un minimum en 0 et on trouve $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, c'est à dire $e^{\mathrm{sh}(x)} - x - 1 \geq 0$.
   En ajoutant $x + 1$ on a bien

   $$\boxed{1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)}}$$

4. L'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ aussi.
   Donc

   $$1 - x \leq e^{\mathrm{sh}(-x)}$$

   Comme $\mathrm{sh}(-x) = -\mathrm{sh}(x)$ et $e^{-\mathrm{sh}(x)} = \dfrac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}}$, on en déduit

   $$1 - x \leq \frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}}$$

   Enfin, pour tout $x \in]0, 1[$, $1 - x > 0$ et $\dfrac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}} > 0$ également : on peut appliquer l'inverse qui est décroissant sur $]0, +\infty[$:

   $$\frac{1}{1-x} \geq \frac{1}{\frac{1}{e^{\mathrm{sh}(x)}}} \qquad \text{donc } e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

   En combinant l'inégalité obtenue en 5 avec celle ci, on a donc

   $$\boxed{1 + x \leq e^{\mathrm{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}}$$

5. Pour tout $x \in]0,1[$, $1+x>0$, tout comme $e^{\mathrm{sh}(x)}$ et $\dfrac{1}{1-x}$: on va pouvoir appliquer la fonction ln a l'inégalité précédente. Comme cette fonction est croissante, on obtient

$$\boxed{\ln(1+x) \leq \mathrm{sh}(x) \leq -\ln(1-x)}$$

6. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \in]0,1[$, donc on peut appliquer l'inégalité obtenue en 5), et on a immédiatement

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)}$$

b) Effectuons la somme de ces inégalités pour k variant de p à np.
Il vient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} \mathrm{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

On reconnait S_n au milieu.
Pour les autres sommes :

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \ln(k+1) - \ln(k)$$

On reconnait un telescopage et il vient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(np+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{np+1}{n}\right)$$

De même,

$$\sum_{k=n}^{np} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} \ln(k) - \ln(k-1)$$

A nouveau un telescopage et

$$\sum_{k=n}^{np} -\ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = \ln(np) - \ln(n-1) = \ln\left(\frac{np}{n-1}\right) = -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

On obtient bien l'encadrement voulu.

c) Il reste à calculer les limites de tout ça :

$$\frac{np+1}{n} = \frac{n(p+\frac{1}{n})}{n} = p + \frac{1}{n}$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = p$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{np+1}{n}\right) = \ln(p)$
De même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{np} = \frac{1}{p}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) = -\ln(\frac{1}{p}) = \ln(p)$
Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(p)}$$