Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et A est une partie de E. Les fonctions sont définies de A dans F.
Le plus souvent, dans les exemples et exercices, A est intervalle de $\mathbb{R}$ et F est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Convergence d'une suite de fonctions

I. A Convergence simple

Définition 1.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \longrightarrow F$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers f sur A lorsque pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (dans F) vers $f(x)$.

Proposition 1.2 (Unicité de la limite)

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A alors la limite simple est unique.

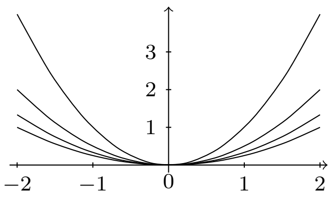
Remarque 1.3 :

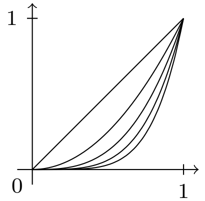
$$\Big[(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur} A\Big] \Leftrightarrow \Big[\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)\Big]$$

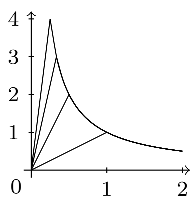
Ainsi une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur A si et seulement si les suites $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent pour tout x **fixé** dans A.

Exemples 1.4 :

- sur $\mathbb{R}$, $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n}$;
- sur $[0\,;1]$, $f_n : x \mapsto x^n$;
- sur $[0\,;+\infty[$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0\,;\frac{1}{n}[; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}\,;+\infty[. \end{cases}$







I. B Convergence uniforme

Définition 1.5

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \longrightarrow F$.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément** vers f sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques 1.6 :

- On munit l'espace $\mathcal{B}(A,F)$ des fonctions bornées de A dans F de la norme : $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|_F$.
  Ainsi pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées et f une fonction bornée, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f si et seulement si elle converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A,F), \|.\|_\infty)$.
  C'est ce qui justifie le nom « norme de la convergence uniforme ».
- Dans le cas général, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang n_0 et $\|f_n - f\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si B est une partie de A et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B.
  En effet pour tout $g \in \mathcal{B}(A,F)$, $\|g\|_{\infty,B} \leqslant \|g\|_{\infty,A}$.

Proposition 1.7

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \longrightarrow F$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

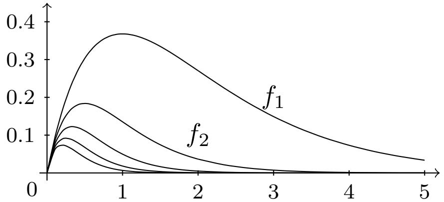
Remarque 1.8 : La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
La réciproque est fausse.

Contre exemple 1.9 : Sur $\mathbb{R}$, $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n}$.

Méthode 1.10 (Démontrer une convergence uniforme)

1. On commence par déterminer un candidat pour la limite uniforme par convergence simple : on pose $\forall x \in A, f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. On calcule : $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|$.
   Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on peut passer par une étude de fonction.
3. On montre que : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple 1.11 : Sur $\mathbb{R}^+, f_n : x \mapsto xe^{-nx}$.



Méthode 1.12 (Démontrer une convergence uniforme par majoration)

1. On commence par déterminer un candidat pour la limite uniforme par convergence simple : on pose $\forall x \in A, f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
2. On majore : $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|$ par un $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$.
   C'est à dire : on majore $\|f_n(x) - f(x)\|$ par α_n qui ne dépend pas de x (uniformément).
3. On montre que : $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple 1.13 : Sur $\mathbb{R}^+, g_n : x \mapsto xe^{-nx}\cos(nx)$.

Méthode 1.14 (Infirmer une convergence uniforme)

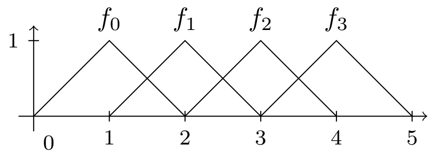
méthode 1 : utiliser une propriété des fonctions f_n non conservée par la fonction f (bornée, continue : à suivre).

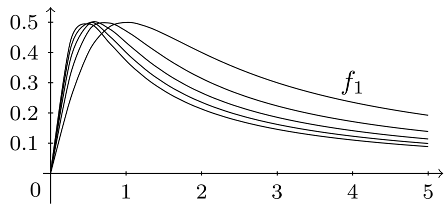
méthode 2 : calculer $\mu_n = \|f_n - f\|_\infty$ et montrer que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

méthode 3 : trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Exemples 1.15 :

- Sur $\mathbb{R}^+, f_n : x \mapsto \begin{cases} x-n & \text{si } x \in [n\,;n+1]; \\ n+2-x & \text{si } x \in]n+1\,;n+2]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Sur $\mathbb{R}^+, f_n : x \mapsto \frac{\sqrt{n}x}{1+nx^2}$.





I. C Limite uniforme d'une suite de fonctions bornées

Proposition 1.16

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée de A dans F ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f ;

Alors : f est bornée sur A.

Exemple 1.17 : Suite de l'exemple 1.4,

sur $[0\,;+\infty[, f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0\,;\frac{1}{n}[; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}\,;+\infty]. \end{cases}$

II Convergence uniforme et continuité

II. A Limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Proposition 2.1

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $a \in A$;
- il existe V un voisinage de a relativement à A tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur V vers f ;

Alors : f est continue en a.

Théorème 2.2

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f ;

Alors : f est continue sur A.

Exemple 2.3 : Retour sur l'exemple 1.4 : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto x^n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;1]$? sur tout intervalle de la forme $[0\,;a]$ avec $0 < a < 1$? sur $[0\,;1[$?

Théorème 2.4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F. Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I ;

Alors : f est continue sur I.

Remarque 2.5 : Pour vérifier la convergence uniforme sur tout segment de I, il suffit de vérifier la convergence uniforme sur tout intervalle d'une famille $\mathcal{F}$ d'intervalles telle que tout segment est inclus dans un des intervalles de $\mathcal{F}$.

Exemple 2.6 : Si $I =]-1\,;1[$, quelle famille d'intervalles peut-on considérer ?

II. B Théorème de la double limite

Théorème 2.7 (de la double limite)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et a un point adhérent à A.
Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n en a ;
- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A ;

Alors :

- la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in F$;
- $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Remarques 2.8 :

- On peut reformuler la conclusion du théorème en :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

d'où le nom du théorème.

- Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée (par exemple si $A = [1\,;+\infty[$), alors le théorème s'applique en $a = +\infty$,
et de même pour $-\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non minorée.

Exemple 2.9 : Toujours avec l'exemple 1.4 sur $[0\,;1[$, $f_n : x \mapsto x^n$,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\lim_{n\to+\infty} x^n\right) = \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 1^-} x^n\right) =$$

donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ______________________________

______________________________.

III Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Théorème 3.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, a un point de I.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f.

Alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment de I où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 3.2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un segment $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a\,;b]$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers une fonction f.

Alors f est continue sur $[a\,;b]$ et :

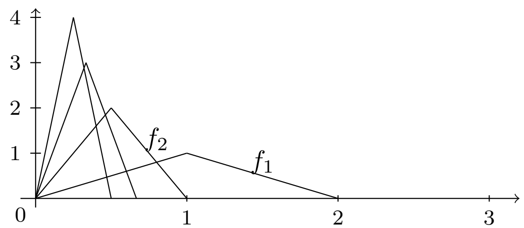
$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 3.3 : Suite de l'exemple 1.11 sur $[0\,;1]$, $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$.

Attention : La convergence simple ne suffit pas !

Contre exemple 3.4 : Sur $[0\,;2]$, pour $n \geqslant 2$,

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } x \leqslant \frac{1}{n} \\ n(2-nx) & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n}\,;\frac{2}{n}\right]. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Corollaire 3.5

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\|.\|_\infty$, alors elle converge aussi vers f pour la norme $\|.\|_1$.

Remarque 3.6 : À nouveau la réciproque est fausse,
contre exemple : sur $[0\,;1]$, $f_n : x \mapsto x^n$.

IV Dérivation d'une suite de fonctions

Théorème 4.1

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$;
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I ;

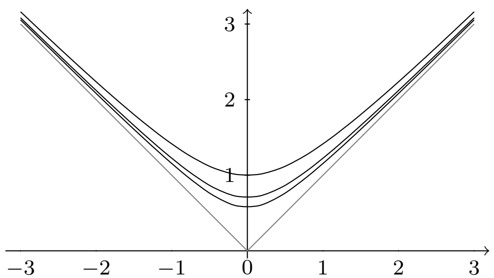
alors :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I ;
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$.

Remarque 4.2 : En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur des intervalles adaptés à la situation.

Attention : La convergence uniforme doit être celle des dérivées !

Contre exemple 4.3 : Sur $\mathbb{R}$, pour $n \in \mathbb{N}^*, f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.



Théorème 4.4 (généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^k(I)$;
- pour tout $j \in [\![0\,;k-1]\!], (f_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers g_j sur I ;
- $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_k sur tout segment de I ;

alors :

- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_0 sur tout segment de I ;
- g_0 est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et pour tout $j \in [\![0\,;k]\!], g_0^{(j)} = g_j$.

V Convergence d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F.
On note : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k$ la **somme partielle** d'ordre n et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **série** de terme général f_n, notée $\sum f_n$.
On reprend ainsi le vocabulaire des séries vu dans le chapitre sur les séries numériques et vectorielles, mais on n'est pas dans le cadre de ce chapitre : il ne s'agit pas de séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. En effet, même si l'on choisit les fonctions f_n dans un espace que l'on munit d'une norme, ce sera souvent un espace de dimension infini comme $(\mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

V. A Convergence simple, convergence uniforme

Définition 5.1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F, on dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement** sur A lorsque la suite des sommes partielles converge simplement sur A.
On appelle alors **somme de la série** la limite des somme partielles et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre n : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n$.

Exemple 5.2 : Convergence simple et somme de la série $\sum xe^{-nx}$.

Définition 5.3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F, on dit que la série $\sum f_n$ **converge uniformément** lorsque la suite des sommes partielles converge uniformément.

Remarque 5.4 : Une série de fonction étant une suite de fonctions, les résultats des parties précédentes s'appliquent aux séries de fonctions. En particulier :

- La convergence uniforme implique la convergence simple.
- La somme d'une série de fonctions bornées sur A qui converge uniformément sur A (ou sur tout segment si A est un intervalle de $\mathbb{R}$) est bornée sur A.
- La somme d'une série de fonctions continues sur A qui converge uniformément sur A (ou sur tout segment si A est un intervalle de $\mathbb{R}$) est continue sur A.

Théorème 5.5 (double limite)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur A et telle que chaque fonction f_n a une limite ℓ_n en $a \in \overline{A}$, alors $\sum \ell_n$ converge et : $S(x) \xrightarrow[x \to a]{} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.

Proposition 5.6

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.

Proposition 5.7

Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Méthode 5.8 (Infirmer une convergence uniforme)

méthode 1 : utiliser une propriété des fonctions f_n non conservée par la fonction f (bornée, continue).

méthode 2 : trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

méthode 3 : trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(R_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Exemples 5.9 :
- $\sum xe^{-nx}$ sur $[0\,;+\infty[$.
- $\sum z^n$ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
- $\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ sur $[0\,;1]$.

V. B Convergence normale

Définition 5.10

Une série de fonction $\sum f_n$ sur A est dite **normalement convergente** sur A lorsque la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 5.11 : En particulier les fonctions f_n doivent être bornée sur A (pour que $\|f_n\|_\infty$ soit bien définie).

Méthode 5.12 (Démontrer une convergence normale)

1. On calcule $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in A} \|f_n(x)\|$.
2. On montre que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Méthode 5.13 (Démontrer une convergence normale par majoration)

1. On majore $\|f_n\|$ sur A par $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$: $\forall x \in A, \|f_n(x)\| \leqslant \alpha_n$ (majoration uniforme : indépendante de $x \in A$).
2. On montrer que la série la série $\sum \alpha_n$ converge.

Méthode 5.14 (Infirmer une convergence normale)

méthode 1 : limite simple non continue (ou non bornée) d'une série de fonctions bornées (ou continues).

méthode 2 : par calcul ou minoration de $\|f_n\|_\infty$;

méthode 3 : trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum \|f_n(x_n)\|$ diverge.

Exemple 5.15 : Série $\sum f_n$ avec $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^n \end{array} \right.$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ puis sur $B_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant r\}$ pour $0 < r < 1$.

V. C Convergence normale et convergence uniforme

Théorème 5.16

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A.

Proposition 5.17

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Remarque 5.18 : La convergence uniforme sur A n'implique pas la convergence normale sur A.

Contre exemple 5.19 : $\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ d'après l'exemple 5.9, mais pas normalement sur $[0\,;1]$ car pour $x = 1$ il n'y a pas convergence absolue.

V. D Intégration et dérivation d'une série de fonctions

Proposition 5.20

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, a un point de I.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction S.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on pose :

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } T : x \mapsto \int_a^x S(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors la suite $\sum F_n$ converge uniformément vers T sur tout segment de I.

Exemple 5.21 : Convergence et somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1\,;1[$.

Proposition 5.22

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur un segment $[a\,;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a\,;b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction S sur $[a\,;b]$,

alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b S(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$$

Proposition 5.23

Soit $\sum f_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I ;

alors :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Remarque 5.24 : De même pour la généralisation à la classe $\mathcal{C}^k$.

Exemple 5.25 : Convergence et somme de la série $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1\,;1[$.

VI Approximation uniforme

VI. A par des fonctions en escalier

Rappel : Soit $a, b \in R$ tels que $a < b$.

- Une **subdivision** du segment $[a\,;b]$ est une famille finie $(a_k)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ telle que $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$.
- Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow F$ une fonction. On dit qu'elle est **en escalier** s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ telle que pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ la fonction f est constante sur $]a_k\,;a_{k+1}[$. On dit alors que la subdivision est **adaptée** à f.
- Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow F$ une fonction. On dit qu'elle est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ telle que pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ la fonction f est continue sur $]a_k\,;a_{k+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[a_k\,;a_{k+1}]$. On dit alors que la subdivision est **adaptée** à f.

Théorème 6.1

Toute fonction continue par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a\,;b]$.

Lemme 6.2

Soit $f \in \mathcal{C}([a\,;b], F)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a\,;b], F)$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Remarques 6.3 :

- En notant $\mathcal{E}([a\,;b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ et $\mathcal{C}_m([a\,;b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$,
$\mathcal{E}([a\,;b], F)$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_m([a\,;b], F), \|.\|_\infty)$.
- Ce résultat permet la construction de l'intégrale de Riemann vue en première année.
- Dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{B}([a\,;b], \mathbb{R}), \|.\|_\infty\big)$, $\overline{\mathcal{E}([a\,;b], \mathbb{R})} \neq \mathcal{C}_m([a\,;b], \mathbb{R})$.
En effet : $\sum 2^{-n} \mathbb{1}_{[0\,;2^{-n}]}$ converge uniformément (car normalement) sur $[0\,;1]$, mais sa somme a une infinité de points de discontinuité, elle n'est donc par continue par morceaux.

VI. B par des polynômes

Théorème 6.4 (Weierstrass)

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{K})$ est limite uniforme sur $[a\,;b]$ de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque 6.5 : L'espace $\mathbb{K}[X]$ des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty\big)$.
De plus, dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{B}([a\,;b], \mathbb{K}), \|.\|_\infty\big)$, $\overline{\mathbb{K}[X]} = \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{K})$ puisqu'une limite uniforme sur $[a\,;b]$ de fonctions polynomiales est continue sur $[a\,;b]$.