Exercices

Exercice 1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{nxe^{-nx}}{1-e^{-x}} \end{array} \right.$.

Exercice 2. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par :

$$f_n : z \mapsto \frac{nz}{1+n\,|z|}.$$

Sur quelles parties de $\mathbb{C}$ la convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f_n : x \mapsto n\sin(x)\cos^n(x)$ sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$?
3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout segment de $]0\,;\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 4.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_n : x \mapsto \frac{2^n x}{1+n2^nx^2}$.
2. Calculer :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Étudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
4. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ la convergence est-elle uniforme ?

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions bornées sur une partie A d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur A.

1. Montrer que la suite $(f_n \times g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A.
2. Le résultat reste-t-il vrai si les fonctions ne sont pas supposées bornées ?

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x$.
Indication : on pourra poser $f_n : x \mapsto f\left(\frac{x}{n}\right)$.

Exercice 7. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, avec F de dimension finie.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}(\overline{A},F)$ où $A \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A, alors elle converge uniformément sur $\overline{A}$.

Exercice 8. Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série de fonctions $\sum f_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{(-1)^n}{n+x} \end{array}$$

Exercice 9. Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n} \end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}_f$.
3. La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
4. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **Indication** : comparaison série-intégrale.
5. La série converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 11. fonction de ζ de Riemann.
On considère la fonction

$$\zeta : \begin{array}{ccc}]1\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}. \end{array}$$

1. Montrer que ζ est bien définie et continue sur $]1\,;+\infty[$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} \zeta(x)$.
3. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$ et calculer ses dérivées.

Exercice 12. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t = 0$ lorsque :

1. $f \in \mathcal{C}^1([0\,;2\pi],\mathbb{R})$;
2. $f \in \mathcal{C}_m([0\,;2\pi],\mathbb{R})$.

Exercice 13. Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E ; F un espace vectoriel normé de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\overline{A}$ dans F.

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A, alors elle converge uniformément sur $\overline{A}$.

Exercice 14. quand la convergence simple entraîne la convergence uniforme. Soit $k \in \mathbb{R}^+$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions k-lipschitziennes sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a\,;b]$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est k-lipschitzienne sur $[a\,;b]$.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;b]$.

Exercices CCINP

Exercice 15 (CCINP 8).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante positive de limite nulle.

   (a) Démontrer que la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente.
   Indication : on pourra considérer $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

   (b) Donner une majoration de la valeur absolue du reste de la série $\sum (-1)^k u_k$.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$.

   (a) Étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

   (b) Étudier la convergence uniforme sur $[0,+\infty[$ de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

Exercice 16 (CCINP 9).

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$.
   Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 17 (CCINP 10). On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

Exercice 18 (CCINP 11).

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a,+\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0,+\infty[$.

Exercice 19 (CCINP 16). On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\Big]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 20 (CCINP 48).

$C^0([0,1],\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1. Énoncer le théorème de Weierstrass d'approximation par des fonctions polynomiales.
2. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(P_n f)$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ vers f^2.
   (b) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(t)f(t)\mathrm{d}t$.
   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire que f est la fonction nulle sur le segment $[0,1]$.

Exercice 21 (CCINP 53). On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

   On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

   (b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

   $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$?

   (c) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.